

Использование электронных таблиц MS Excel для проверки статистических гипотез о сравнении средних статистических совокупностей с неизвестными дисперсиями

Цель работы – научить с помощью MS Excel определять достоверности различий средних арифметических двух статистических совокупностей.

1. Проверка гипотезы о равенстве средних с неизвестными дисперсиями

Здесь выделяют два случая. В первом случае применяется t -критерий Стьюдента для двух независимых, несвязанных выборок (двухвыборочный t -критерий), во втором случае – для зависимых, связанных выборок (парный t -критерий).

Отметим, что в обоих случаях гипотезы будут формулироваться следующим образом. Нулевая гипотеза H_0 : генеральные средние значения равны, альтернативная гипотеза H_1 : генеральные средние значения различны.

1.1. Критерий для независимых выборок

В случае независимых выборок t -критерий применим для малых независимых выборок, если есть основания считать генеральные дисперсии равными.

АЛГОРИТМ

1. Сформулировать гипотезы. Выбрать уровень значимости α .

Нулевая гипотеза $H_0: \bar{X}_1 = \bar{X}_2$, то есть генеральные средние значения равны.

H_1 : 1) $\bar{X}_1 \neq \bar{X}_2$, 2) $\bar{X}_1 > \bar{X}_2$, 3) $\bar{X}_1 < \bar{X}_2$.

2. Найти эмпирическое значение критерия Стьюдента для случая несвязанных, независимых выборок по формуле:

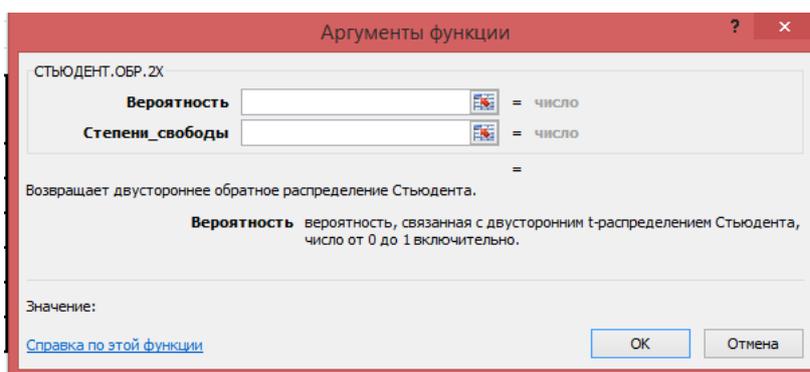
$$t_{эмп} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{(n_1 - 1) \cdot S_1^2 + (n_2 - 1) \cdot S_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}},$$

где \bar{x}_1, \bar{x}_2 ; S_1^2, S_2^2 ; n_1 и n_2 – средние арифметические, несмещенные дисперсии, объёмы первой и второй выборки соответственно.

4. Найти критическое значение t -критерия Стьюдента с помощью статистической функции **СТЮДЕНТ.ОБР.2Х**, которая имеет формат **СТЮДЕНТ.ОБР.2Х** (*вероятность*; *степени_свободы*), где *вероятность* – это уровень значимости α ; *степени_свободы* определяются по формуле $k = n_1 + n_2 - 2$.

1) $t_{крит.} = \text{СТЮДЕНТ.ОБР.2Х}(\alpha, k)$,

2) и 3) $t_{крит.} = \text{СТЮДЕНТ.ОБР.2Х}(2\alpha, k)$.



5. Сравнить эмпирическое и критическое значения критерия Стьюдента, учитывая, что t -критерий двусторонний. Если $|t_{эм}| < |t_{крит}|$, принимается нулевая гипотеза, иначе принимается альтернативная.

Пример 1. При измерении пульса 10 больных экспериментальной группы (после проведения некоторой процедуры) и 12 больных контрольной группы были получены следующие результаты: $\bar{x} = 70$ уд/мин для первой группы, $\bar{y} = 68$ уд/мин для второй группы; оценки дисперсий соответственно равны: $S_x^2 = 9$ (уд/мин)² и $S_y^2 = 4$ (уд/мин)². Определить, значимо ли различаются средние значения пульса у больных обеих групп для уровня значимости $\alpha = 0,05$.

Решение. Сформулируем гипотезы. В качестве нулевой примем гипотезу о равенстве средних значений пульса в генеральных совокупностях больных, принявших процедуру, и больных, её не принявших, считая, что распределение значений пульса подчиняется в целом закону нормального распределения.

Найдём эмпирическое значение критерия:

$$t_{эм} = \frac{70 - 68}{\sqrt{9 \cdot 9 + 11 \cdot 4}} \sqrt{\frac{10 \cdot 12 \cdot (10 + 12 - 2)}{10 + 12}} = 1,87.$$

С помощью статистической функции **СТЮДЕНТ.ОБР.2X** определим для уровня значимости 0,05 и степени свободы $k=10+12-2=20$ критическое значение критерия $t_{крит}(0,05; 20) = 2,086$.

Таким образом, $t_{эм} < t_{крит}$, так как $1,87 < 2,086$, и на уровне значимости 0,05 принимается нулевая гипотеза, то есть различие в средних значениях пульса не является статистически значимым и может быть обусловлено случайными причинами, а не именно влиянием процедуры.

1.2. Критерий для зависимых выборок

АЛГОРИТМ

1. Сформулировать гипотезы. Выбрать уровень значимости α .
2. Найти эмпирическое значение критерия Стьюдента для случая зависимых выборок с равным числом измерений по формуле:

$$t_{эм} = \frac{\bar{d}}{S_d},$$

где $d = x_1 - x_2$ – разности между соответствующими значениями переменной X_1 и переменной X_2 , а \bar{d} – среднее этих разностей.

3. Найти S_d по формуле:

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n \cdot (n-1)}}.$$

4. Определить критическое значение t -критерия Стьюдента с помощью статистической функции **СТЮДЕНТ.ОБР.2Х**, которая имеет формат **СТЮДЕНТ.ОБР.2Х(вероятность; степени_свободы)**, где *вероятность* – это уровень значимости, например, $\alpha = 0,05$; *степени_свободы* определяются по формуле $k=n-1$.

5. Сравнить эмпирическое и критическое значения критерия Стьюдента, учитывая, что t -критерий двусторонний. Если $|t_{эм}| < |t_{крит}|$, то принимается нулевая гипотеза, иначе принимается альтернативная.

Рассмотрим пример использования t -критерия Стьюдента для зависимых и, очевидно, равных по объему выборок.

Пример 2. Изучался уровень ориентации учащихся на художественно-эстетические ценности. С целью активизации формирования этой ориентации в экспериментальной группе проводились беседы, выставки детских рисунков, были организованы посещения музеев и картинных галерей, проведены встречи с музыкантами, художниками и др. Закономерно встаёт вопрос: какова эффективность проведённой работы? С целью проверки эффективности этой работы до начала и после эксперимента давался тест.

Ученики ($n = 10$)	Баллы		Вспомогательные расчеты	
	до начала эксперимента (X_1)	в конце эксперимента (X_2)	d	d^2
Агапов А. П.	16	24	8	64
Быстров И. Н.	9	15	6	36
Иванов С. А.	14	18	4	16
Новиков К. Н.	20	19	-1	1
Пирогов А. С.	11	17	6	36

Ученики ($n = 10$)	Баллы		Вспомогательные расчеты	
	до начала эксперимента (X_1)	в конце эксперимента (X_2)	d	d^2
Рыжиков И. В.	16	25	9	81
Серов А. А.	19	26	7	49
Сидоров В. К.	15	22	7	49
Суворов Н. Н.	13	21	8	64
Топоров Г. И.	15	24	9	81
Сумма	148	211	63	477
Среднее	14,8	21,1		

Решение. Нулевая гипотеза (H_0): о недостоверных различиях средних арифметических, то есть экспериментальные воздействия неэффективны. Альтернативная гипотеза (H_1): о достоверных различиях средних арифметических, то есть эффективны экспериментальные воздействия.

Вычислим: $\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} = \frac{63}{10} = 6,3$. Затем найдём S_d :

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n \cdot (n-1)}} = \sqrt{\frac{477 - (63 \cdot 63) / 10}{10 \cdot (10-1)}} = \sqrt{0,89} \approx 0,943.$$

Найдём эмпирическое значение критерия:

$$t_{эм} = \frac{\bar{d}}{S_d} = \frac{6,3}{0,943} = 6,678.$$

С помощью статистической функции **СТЮДЕНТ.ОБР.2Х** определим для уровня значимости 0,05 и числа степеней свободы $k=10-1=9$ критическое значение критерия $t_{крит} = 2,262$.

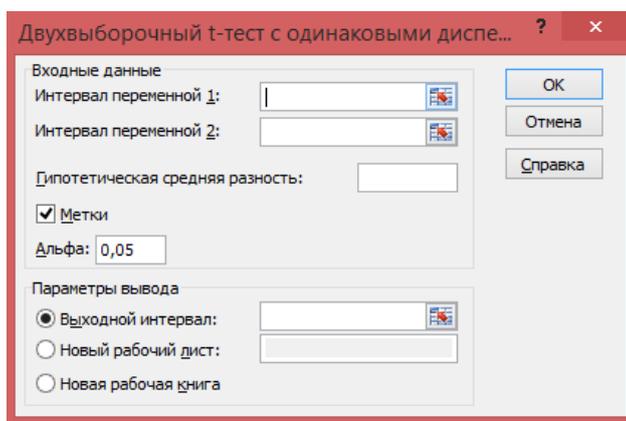
Таким образом, $t_{эм} > t_{крит}$, так как $6,678 > 2,262$, и на уровне значимости 0,05 принимается гипотеза H_1 , то есть делается вывод об эффективности экспериментального воздействия.

3. Использование инструмента Пакет анализа

Для использования статистического пакета анализа данных необходимо:

- указать курсором мыши на пункт главного меню **Данные** и щелкнуть левой кнопкой мыши;
- в крайнем правом углу главного меню выбрать команду **Анализ данных** (если команда Анализ данных отсутствует, то необходимо установить в Excel пакет анализа данных);
- выбрать строку:

1) для *произвольных* статистических совокупностей с неизвестными дисперсиями в случае независимых выборок применяется **Двухвыборочный t -тест с одинаковыми дисперсиями**:



В диалоговом окне задаются следующие параметры:

Интервал переменной 1 – адреса ячеек, содержащих выборочные значения случайной величины X_1 ;

Интервал переменной 2 – адреса ячеек, содержащих выборочные значения случайной величины X_2 ;

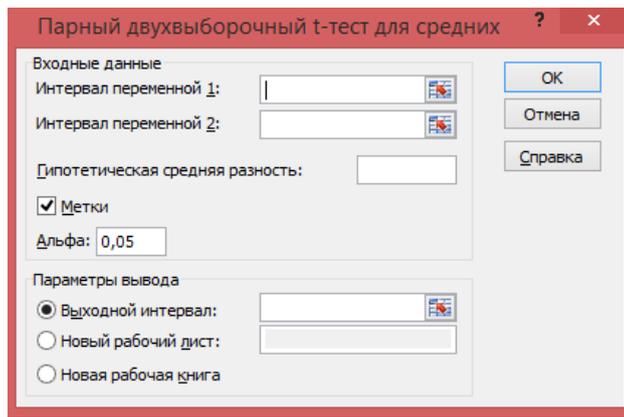
Гипотетическая средняя разность задаёт число, равное предполагаемой разности математических ожиданий (их разность равна 0);

Метки – включается, если учитываются заголовки данных;

Альфа – уровень значимости (по умолчанию 0,05, то есть надёжность 95%);

Выходной интервал – указывается, куда выводятся результаты вычислений.

2) для *произвольных* статистических совокупностей с неизвестными дисперсиями в случае зависимых выборок применяется **Парный двухвыборочный t -тест для средних**:



В диалоговом окне задаются следующие параметры:

Интервал переменной 1 – адреса ячеек, содержащих выборочные значения случайной величины X_1 ;

Интервал переменной 2 – адреса ячеек, содержащих выборочные значения случайной величины X_2 ;

Гипотетическая средняя разность задаёт число, равное предполагаемой разности математических ожиданий (их разность равна 0);

Метки – включается, если учитываются заголовки данных;

Альфа – уровень значимости (по умолчанию 0,05, то есть надёжность 95%);

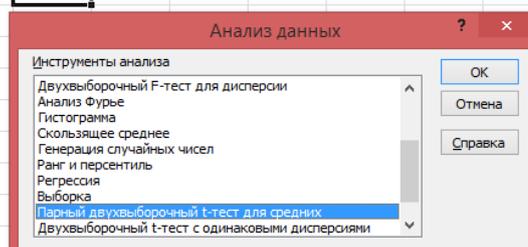
Выходной интервал – указывается, куда выводятся результаты вычислений.

• В результате анализа (во всех трёх случаях) получается таблица, которую необходимо использовать для сравнения результатов эмпирического (экспериментального) значения t -критерия с критическим (табличным) **t критическое двухстороннее**.

• Выводы о значимости различий делаются для уровня значимости α : если эмпирическое значение критерия меньше критического значения критерия, то нулевая гипотеза принимается, иначе отвергается.

Замечание. С помощью Пакета анализа проведём вычисления необходимых показателей для примера 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
	до начала экспери- мента	в конце экспери- мента								
1										
2	16	24								
3	9	15								
4	14	18								
5	20	19								
6	11	17								
7	16	25								
8	19	26								
9	15	22								
10	13	21								
11	15	24								



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	до начала эксперимента	в конце эксперимента								
2	16	24								
3	9	15								
4	14	18								
5	20	19								
6	11	17								
7	16	25								
8	19	26								
9	15	22								
10	13	21								
11	15	24								
12										
13										
14										

Парный двухвыборочный t-тест для средних

Входные данные

Интервал переменной 1:

Интервал переменной 2:

Гипотетическая средняя разность:

Метки

Альфа:

Параметры вывода

Выходной интервал:

Новый рабочий дист:

Новая рабочая книга

OK Отмена Справка

	A	B	C	D	E	F	G
1	до начала эксперимента	в конце эксперимента					
2	16	24		Парный двухвыборочный t-тест для средних			
3	9	15					
4	14	18			до начала эксперимента	в конце эксперимента	
5	20	19		Среднее	14,8	21,1	
6	11	17		Дисперсия	11,06666667	13,87777778	
7	16	25		Наблюдения	10	10	
8	19	26		Корреляция Пирсона	0,647330857		
9	15	22		Гипотетическая разность средних	0		
10	13	21		df	9		число степеней свободы
11	15	24		t-статистика	-6,67798664		
12				P(T<=t) одностороннее	4,53936E-05		
13				t критическое одностороннее	1,833112933		
14				P(T<=t) двухстороннее	9,07871E-05		
15				t критическое двухстороннее	2,262157163		

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Изучался показатель стрессоустойчивости для двух профессий: учителя и врача, две группы по 25 человек. Для уровня значимости $\alpha=0,01$ необходимо проверить выполнимость нулевой гипотезы о несущественности различий в средних значениях стрессоустойчивости у учителей и врачей. Сделать соответствующие выводы.

Группа 1 (учителя)		Группа 2 (врачи)	
устойчивость к стрессу (баллы)		устойчивость к стрессу (баллы)	
1	23	1	25
2	17	2	24
3	18	3	17
4	19	4	23
5	22	5	24
6	18	6	22
7	19	7	24
8	17	8	20
9	20	9	21
10	21	10	22
11	24	11	23
12	19	12	19
13	21	13	23
14	20	14	21
15	22	15	20
16	23	16	19
17	18	17	25
18	16	18	26
19	17	19	21
20	21	20	24
21	25	21	23
22	20	22	25
23	15	23	22
24	16	24	23
25	18	25	20

Задача 2. Изучалось влияние некоторого лекарственного препарата на артериальное давление до и после принятия этого препарата. Определите достоверность различия средних показателей. Сделайте соответствующие выводы.

АД, мм. рт. ст. до	АД, мм. рт. ст. после
170	175
185	155
190	170
210	165
240	195
250	210