Лабораторная работа.
Критерий χ^2

Цель работы – научить с помощью MS Excel применять хи-квадрат для сравнения законов распределений двух статистических совокупностей.

Здесь применим критерий χ^2 (хи-квадрат) для сравнения распределений объектов двух совокупностей на основе измерений (по любой шкале) в двух **независимых** выборках.

Гипотезы. Нулевая гипотеза H_0: $p_1 \le p_2$, альтернативная гипотеза H_1: $p_1 > p_2$, например, нулевая гипотеза о равенстве вероятностей верного выполнения некоторого задания учащимися контрольных и экспериментальных классов.

Замечание. При проверке нулевых гипотез не обязательно, чтобы значения вероятностей p_1 и p_2 были известны, так как гипотезы только устанавливают между ними некоторые соотношения (равенство, больше или меньше).

Предположим, что состояние изучаемого свойства (например, выполнение определенного задания) измеряется у каждого объекта по шкале наименований, имеющей только две взаимоисключающие категории (например: «выполнено верно» – «выполнено неверно»). По результатам измерения состояния изучаемого свойства у объектов двух выборок составляется четырехклеточная таблица 2×2.

Таблица 1

	Категория 1	Категория 2	
Выборка 1	Q_{11}	Q_{12}	$Q_{11} + Q_{12} = n_1$
Выборка 2	Q_{21}	Q_{22}	$Q_{21} + Q_{22} = n_2$
	$Q_{11} + Q_{21}$	$Q_{12} + Q_{22}$	$n_1 + n_2 = N$

В этой таблице Q_{ij} – число объектов в i выборке, попавших в j категорию по состоянию изучаемого свойства; i ={1;2} – число выборок; j={1;2} – число категорий; N – общее число наблюдений, равное $Q_{11} + Q_{12} + Q_{21} + Q_{22}$ или n_1+n_2.

Для проверки нулевой гипотезы по данным таблицы 2×2 (табл. 1) находим эмпирическое значение критерия по формуле:

1) при условии, что $Q_{ij}< 10$:

$$\chi^2_{эмп} = \frac{N\left(\left|Q_{11}\cdot Q_{22} - Q_{12}\cdot Q_{21}\right| - N/2\right)^2}{n_1\cdot n_2\cdot\left(Q_{11}+Q_{21}\right)\cdot\left(Q_{12}+Q_{22}\right)}, \tag{1}$$

где n_1, n_2 — объёмы выборок, $N = n_1 + n_2$ — общее число наблюдений;

2) при условии, что $Q_{i\,j}> 10$:

$$\chi^2_{эмп} = \frac{(n_1+n_2)\left(Q_{11}\cdot Q_{22} - Q_{12}\cdot Q_{21}\right)^2}{n_1\cdot n_2\cdot\left(Q_{11}+Q_{21}\right)\cdot\left(Q_{12}+Q_{22}\right)}, \tag{2}$$

где n_1, n_2 — объёмы выборок.

Замечание. Может быть использована формула, которая имеет вид:

$$\chi^2_{эмп} = \sum_{i=1}^{2}\frac{\left(m_i - m_i^*\right)^2}{m_i^*}, \tag{3}$$

где m_i – эмпирические частоты, m^*_i – теоретические частоты.

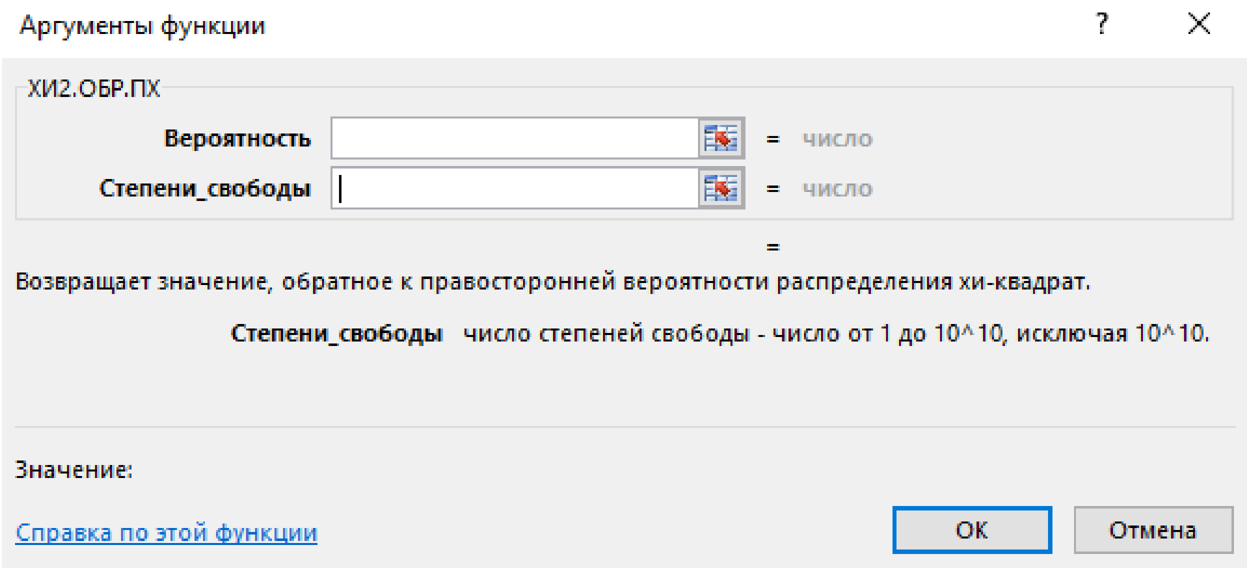
АЛГОРИТМ

1. Составить по исходным данным таблицу вида как табл. 1.

2. Сформулировать соответствующие гипотезы, выбрать уровень значимости α.

3. Определить эмпирическое значение критерия «хи-квадрат» $\chi^2_{эмп}$ по формуле (в зависимости от условия выбрать либо (1), либо (2), или (3)).

4.Определить критические значения критерия «хи-квадрат» с помощью статистической функции **ХИ2.ОБР.ПХ**, здесь степень свободы определяется по формуле $k = (i - 1)\cdot(j - 1)$, где i – количество строк в таблице (1), j – количество столбцов.



5.Если $\chi^2_{эмп} < \chi^2_{крит}$, то на уровне значимости α принимается нулевая гипотеза, в ином случае – альтернативная.

Пример 1. Производится проверка знаний студентов при помощи тестовой системы на допуск к выполнению лабораторной работы. Результаты проверки оценивались по номинальной шкале: «допущен» − 1, «не допущен» − 0. Цель исследования состоит в сравнении подготовленности студентов факультета А и факультета Б.

Количество	"1"		"0"		Всего	
Факультет А	Q11	38	Q12	14	N1=Q11+Q12	52
Факультет Б	Q21	27	Q22	17	N2=Q21+Q22	44

Решение. Сформулируем статистические гипотезы:

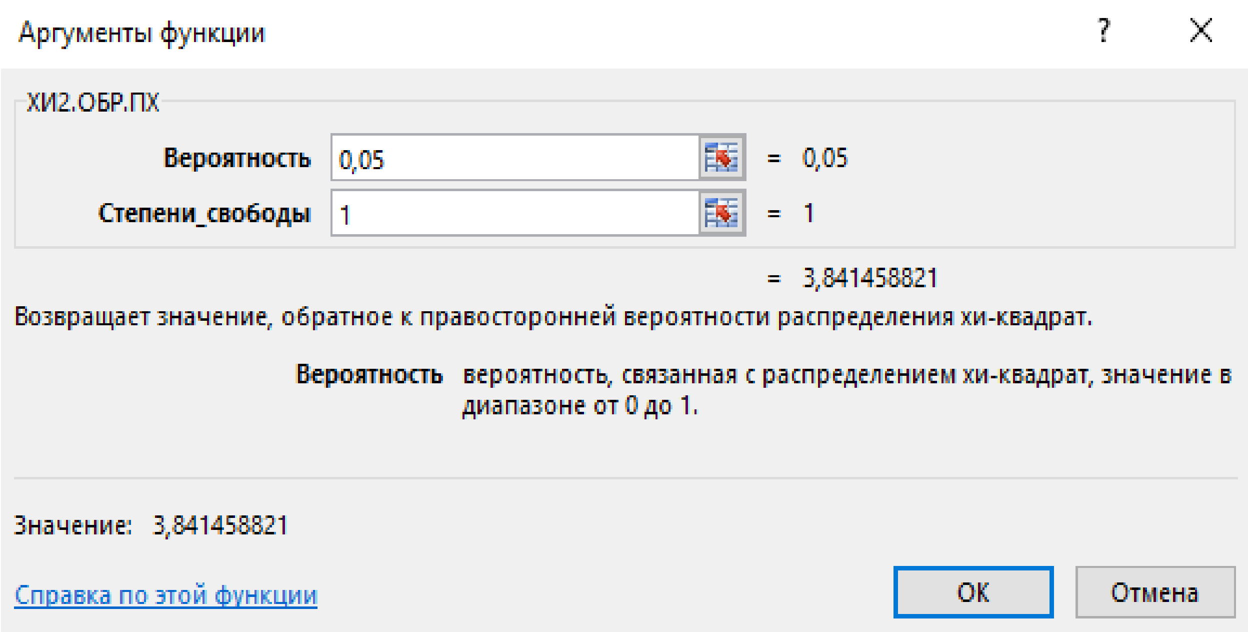
H_0: уровень подготовки студентов факультетов А и В одинаков.

H_1: уровень подготовки студентов А и В различен.

Выбираем уровень значимости α=0,05.

Здесь выполняется $Q_{i\ j}$> 10, поэтому воспользуемся формулой (2) найдем с помощью MS Excel наблюдаемое или эмпирическое значение $\chi^2_{эмп}$ = 1,496.

В MS Excel с помощью статистической функции **ХИ2.ОБР.ПХ** найдем критическое значение критерия.



В силу того, что $\chi^2_{эмп} = 1{,}496 < \chi^2_{крит} = 3{,}841$, принимается нулевая гипотеза.

Таким образом, подготовка студентов факультетов А и Б не отличается друг от друга на уровне значимости, равном 0,05.

Пример 2. Оценивается мнение студентов относительно содержания методических указаний к лабораторным работам по одной из учебных дисциплин. Сравнивается мнение студентов очного и заочного факультетов: «методические указания требуют доработки с целью улучшения их содержания». Результаты проверки оценивались по номинальной шкале: «да» − 1, «нет» − 0.

Решение. Сформулируем статистические гипотезы:

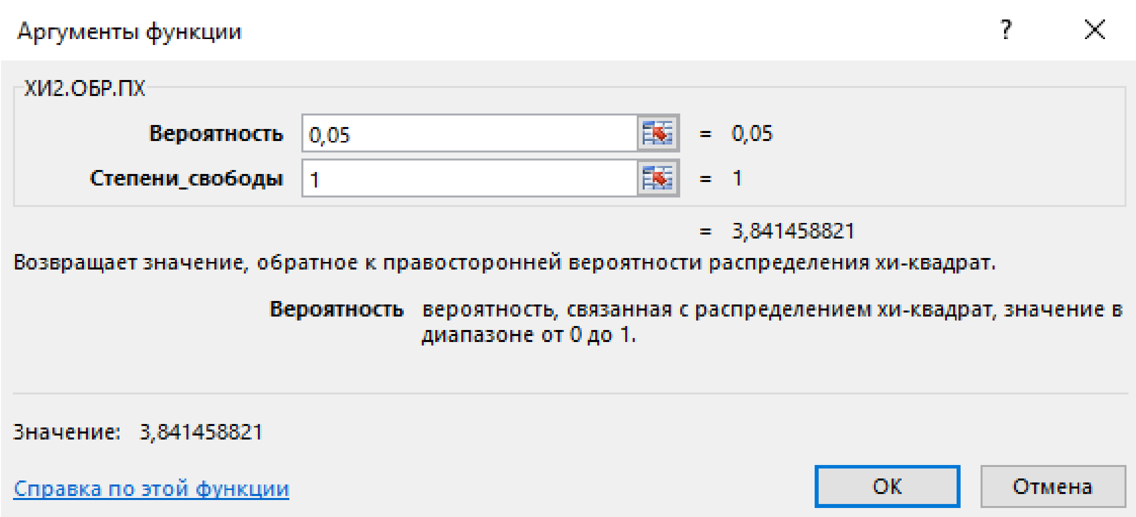
H_0: мнения студентов очного и заочного факультетов, состоящее в необходимости доработки методических указаний совпадают.

H_1**:** мнения студентов о необходимости доработки не совпадают.

Выбираем уровень значимости α=0,05.

Здесь выполняется $Q_{11} < 10$, поэтому воспользуемся формулой (1) найдем с помощью MS Excel наблюдаемое или эмпирическое значение $\chi^2_{эмп} = 5{,}149$.

В MS Excel с помощью статистической функции **ХИ2.ОБР.ПХ** найдем критическое значение критерия.



В силу того, что $\chi^2_{эмп} = 5{,}149 > \chi^2_{крит} = 3{,}841$, нулевая гипотеза отвергается.

Следовательно, мнения студентов о необходимости доработки методических указаний различаются на уровне значимости 0,05.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Проводился эксперимент, направленный на выявление лучшего из учебников, написанных двумя авторскими коллективами в соответствии с целями обучения геометрии и содержанием программы IX класса. Для проведения эксперимента методом случайного отбора были выбраны два района, большинство школ которых относились по своему расположению к «сельским». Учащиеся первого района (20 классов) обучались по учебнику № 1, учащиеся второго района (15 классов) обучались по учебнику № 2.

Рассмотрим методику сравнения ответов учителей экспериментальных школ двух районов на один из вопросов анкеты: «Доступен ли учебник в целом для самостоятельного чтения и помогает ли он усвоить материал, который учитель не объяснял в классе?». (Ответ: «да – нет».)

	Да	Нет
Первый район	$Q_{11} = 15$	$Q_{12} = 5$
Второй район	$Q_{21} = 7$	$Q_{22} = 8$

Задача 2. Изучается расщепление у томатов по окраске плодов. После проведения эксперимента было получено 310 красных плодов и 90 жёлтых плодов. Ожидалось же при обычном моногибридном скрещивании отношение 3:1, то есть 300 красных и 100 жёлтых плодов. Выяснить, является ли это различие случайным.