Лекция 15.

Кривые второго порядка.

Часть 1

На лекции дается классификация линий (кривых) второго порядка, исследуется одна из таких линий – эллипс.

1. Понятие кривой второго порядка

Ранее подробно была изучена простейшая плоская линия – прямая. Как известно, прямая на плоскости задается линейным уравнением с двумя переменными. Линейное уравнение иногда называют алгебраическим уравнением первой степени, а прямую – линией первого порядка.

Сейчас дадим определение линии второго порядка.

Линией (или кривой) второго порядка называется фигура, задаваемая в некоторой декартовой системе координат на плоскости алгебраическим уравнением второй степени, которое в общем виде принято записывать так:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Здесь x, y – переменные, а коэффициенты при переменных – параметры, при фиксировании которых получается конкретное уравнение линии. В этом уравнении требуется, чтобы среди параметров a, b, c хотя бы один был не равен 0, иначе (если допустить, что все три первых параметра равны 0) это уравнение превратится в линейное. Коэффициент 2 в записи общего уравнения используют для того, чтобы упростить вид некоторых формул.

В ряде случаев указанное уравнение дает пустое множество точек, то есть несуществующую линию. Например, если $a = 1$ и $f = 1$, а все остальные параметры равны 0, то полученное уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решений. В этом случае линию условно называют мнимой.

Опишем реально существующие линии второго порядка, то есть линии, образованные непустым множеством точек. Для классификации составим два определителя из параметров уравнения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}, \ \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}.$$

Обратите внимание, коэффициент 2 здесь отсутствует.

Если $\Delta \neq 0$, то линию называют невырожденной. Среди реально существующих линий могут получиться только 3 вида: эллипс ($\delta > 0$), гипербола

($\delta < 0$) и парабола ($\delta = 0$). На рис. 1 представлены примеры невырожденных линий второго порядка.

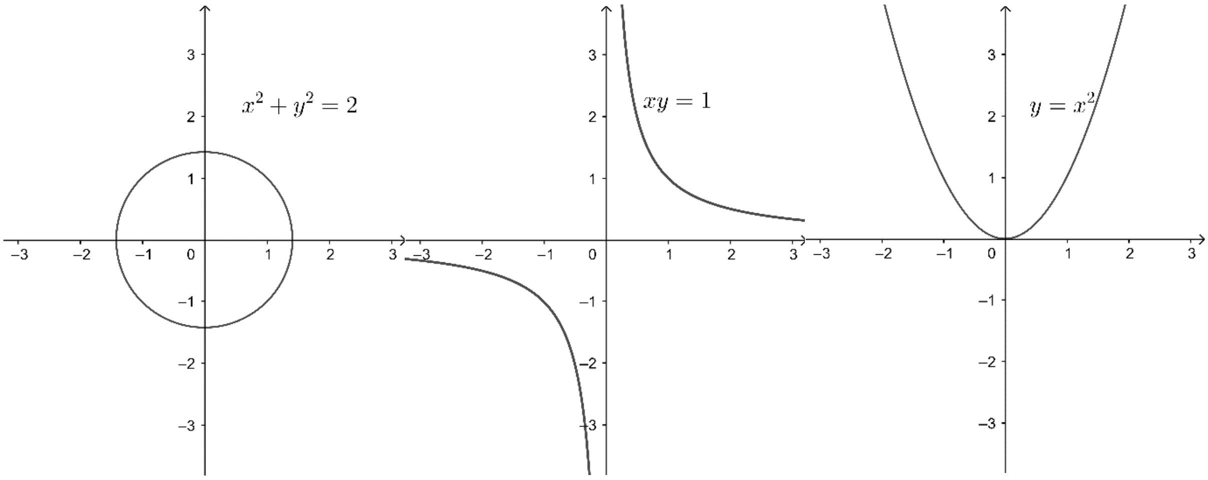

Рис. 1

Если $\Delta = 0$, то линию называют вырожденной. Линия может выродиться в точку ($\delta > 0$), либо в две пересекающиеся прямые ($\delta < 0$), либо в две параллельные прямые или совпадающие прямые ($\delta = 0$). На рис. 2 представлены примеры вырожденных линий второго порядка.

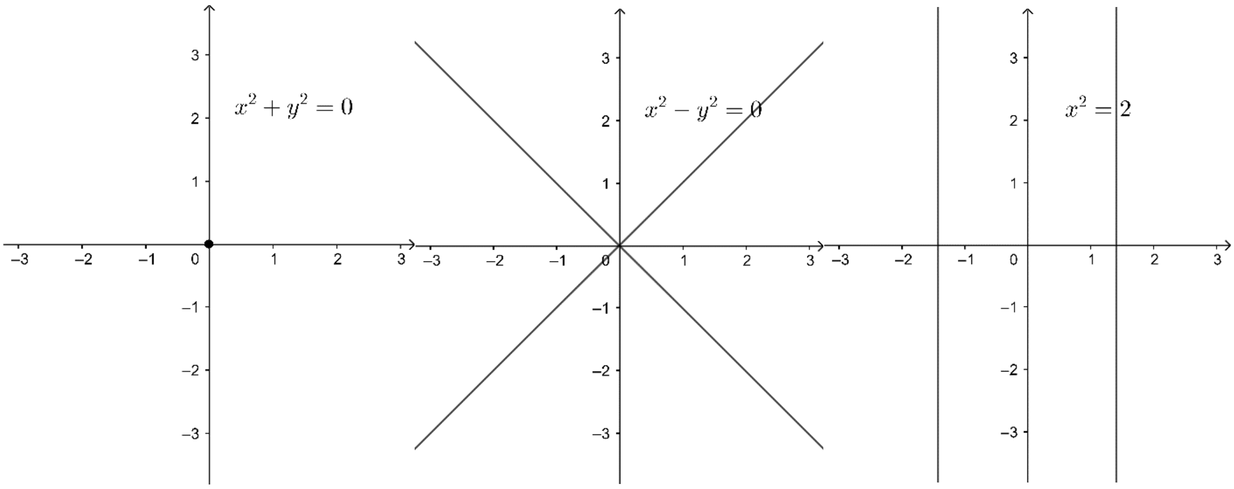

Рис. 2

Наша задача состоит в том, чтобы изучить три указанных вида невырожденных линий второго порядка, научиться задавать их аналитически, с помощью уравнений в определенной системе координат. На данной лекции рассмотрим эллипс.

2. Эллипс

Дадим определение эллипса как геометрической фигуры.

Эллипсом называется множество точек этой плоскости, таких, что сумма расстояний от каждой из них до точек F_1 и F_2 есть величина постоянная.

Фиксированные точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса, расстояние между ними – межфокусным расстоянием. Это расстояние обозначают $2c$ (рис. 3).

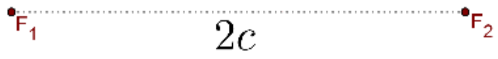

Рис. 3

Обозначим фиксированную сумму расстояний от любой точки эллипса до фокусов, о которой говорится в определении, через $2a$. Для того чтобы получилось непустое множество точек, надо потребовать, чтобы эта сумма была больше межфокусного расстояния, то есть $2a > 2c$, или $a > c$.

Рассмотрим произвольную точку M, лежащую на эллипсе. Длины отрезков MF_1 и MF_2 называются фокальными радиусами. Сумма длин этих фокальных радиусов равна $2a$.

В определении эллипса содержится и критерий принадлежности точки эллипсу, и способ его построения. Чтобы представить, как выглядит эллипс, можно изобразить некоторые точки, удовлетворяющие условию: рис. 4.

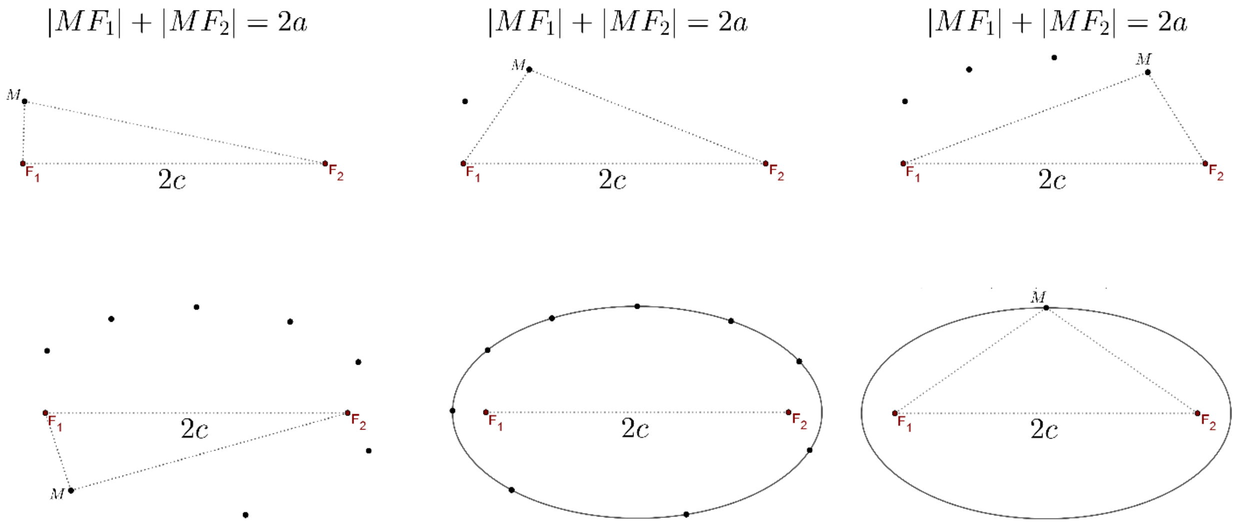

Рис. 4

Если фокусы начать сближать, то по мере их сближения эллипс все больше будет напоминать окружность (рис. 5).

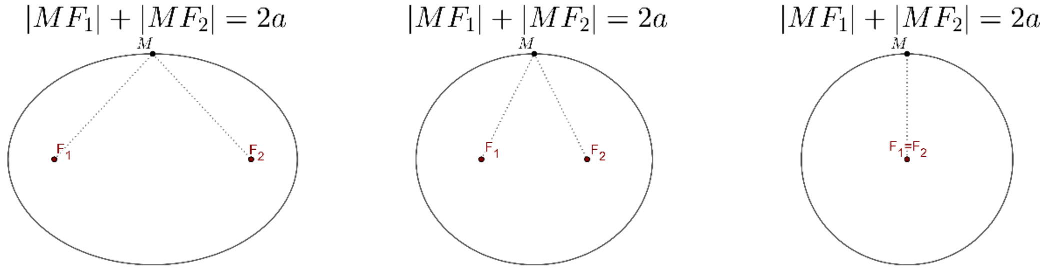

Рис. 5

В частности, если фокусы сольются в одну точку, то эллипс в точности превратится в окружность с центром в совпавших фокусах, радиус которой равен a (соотнесите определения эллипса и окружности друг с другом).

Чтобы записать уравнение эллипса, введем определенную декартову систему координат, называемую канонической системой. В качестве начала координат будет выступать точка O – середина отрезка F_1F_2. Ось абсцисс направим вдоль прямой F_1F_2, ось ординат берем перпендикулярно первой оси в любом направлении (рис. 6).

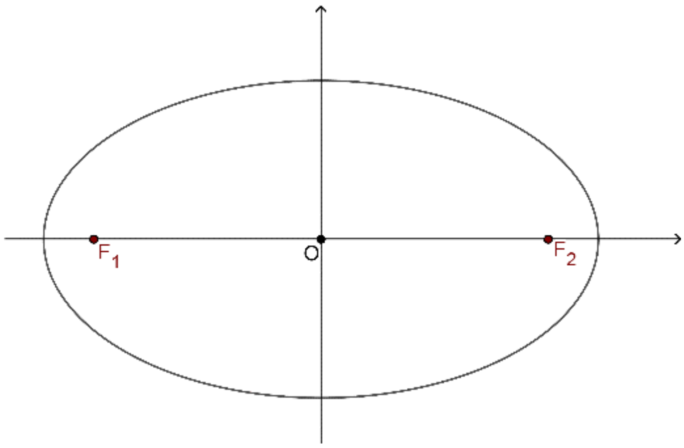

Рис. 6

Эллипс симметричен относительно этих осей. Их называют осями симметрии эллипса. Эллипс также симметричен относительно точки O, ее называют центром эллипса.

Для окружности канонической системой координат является система, в которой центр окружности совпадает с ее началом.

Фокусы в канонической системе координат имеют абсциссы c и $(-c)$ (рис. 7).

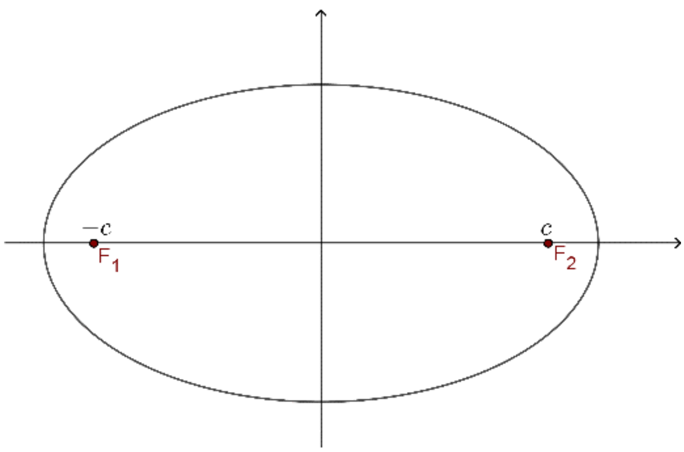

Рис. 7

Эллипс пересекает ось Ox в точках с абсциссами a и $(-a)$ (рис. 8).

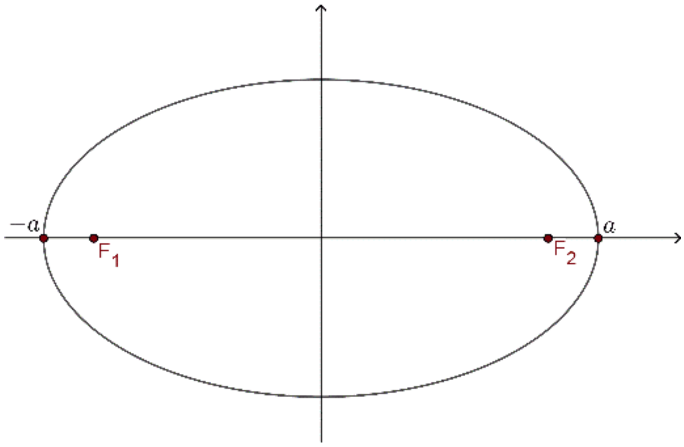

Рис. 8

Введем еще один параметр b, который будет необходим для составления уравнения эллипса:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Можно показать, что эллипс пересечет ось Oy в точках с ординатами b и $(-b)$ (рис. 9).

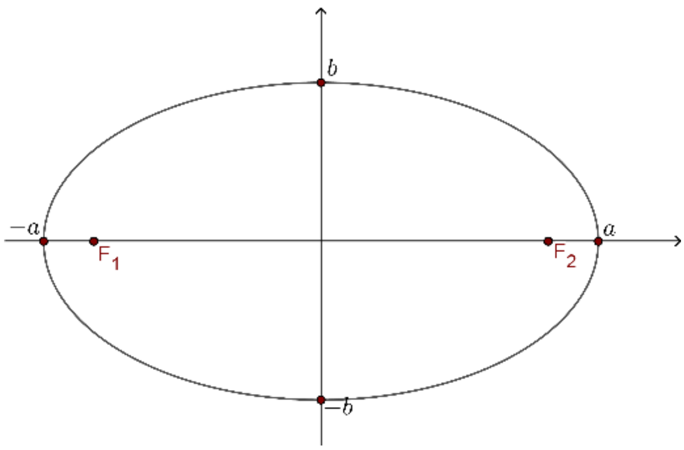

Рис. 9

Параметры a, b связаны неравенством $a \geq b$. Параметр a называют большой полуосью, b – малой полуосью. Для окружности $c = 0$, $a = b$.

Указанные точки a, $(-a)$, b, $(-b)$ пересечения эллипса с осями координат называются вершинами эллипса. Если через эти точки провести прямые параллельные осям координат, то они образуют прямоугольник, в который заключен эллипс. Этот прямоугольник называют опорным (рис. 10).

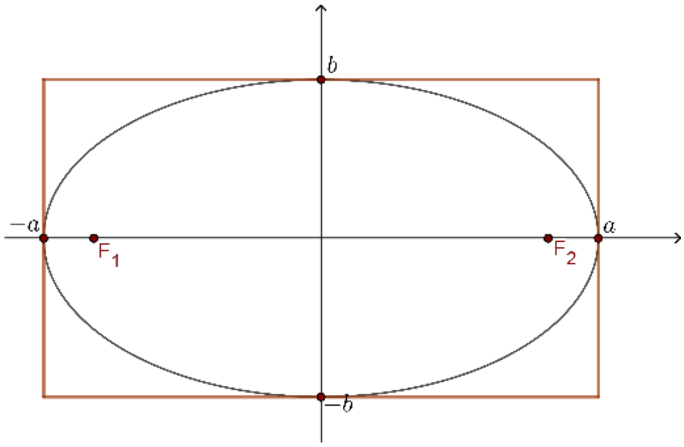

Рис. 10

В канонической системе координат фокальные радиусы для произвольной точки $M(x, y)$ эллипса могут быть вычислены по следующим формулам:

$$|MF_1| = \left|\frac{c}{a}x + a\right|,\ |MF_2| = \left|\frac{c}{a}x - a\right|.$$

Теперь перейдем к уравнению эллипса в его канонической системе координат.

Точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу тогда и только тогда, когда сумма длин фокальных радиусов равна $2a$ (рис. 11).

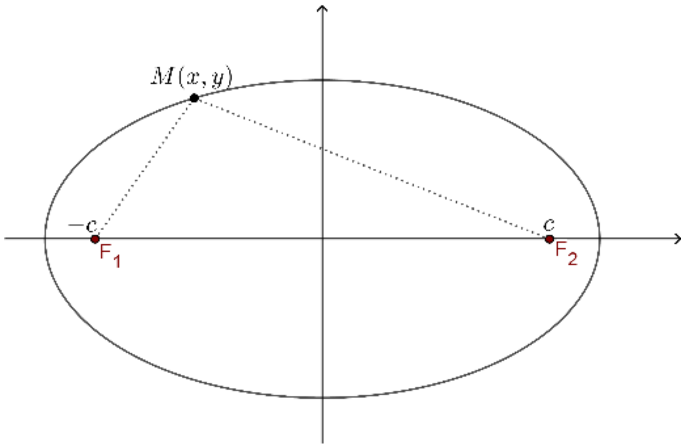

Рис. 11

Выразим каждый радиус через координаты его концов, получим равенство с переменными x и y:

$$M(x,\ y) \in \text{Эс} \Leftrightarrow |MF_1| + |MF_2| = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Здесь два квадратных корня. Для избавления от них придется два раза возвести уравнение в квадрат, после чего равенство можно преобразовать к виду

$$\Leftrightarrow x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Поделим это равенство на число, стоящее в правой части:

$$\overset{a>c}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1.$$

Учитывая, что разность квадратов $a^2 - c^2$ мы обозначили через b^2, получим уравнение:

$$\xLeftrightarrow{b=\sqrt{a^2-c^2}} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

которое называется канонeческим уравнением эллипса.

Рассмотрим на эллипсе произвольную точку M_0, и проведем через не секущую к эллипсу (рис. 12).

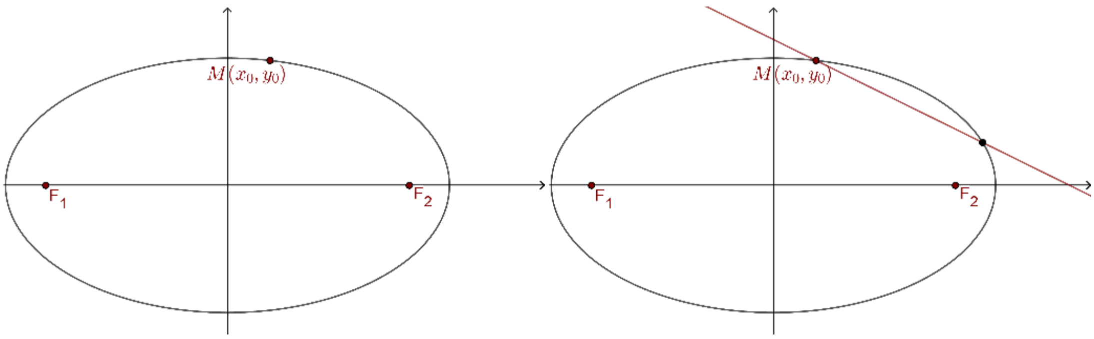

Рис. 12

Эта прямая пересечет эллипс еще в какой-то одной точке. Будем приближать эту точку к M_0 (рис. 13).

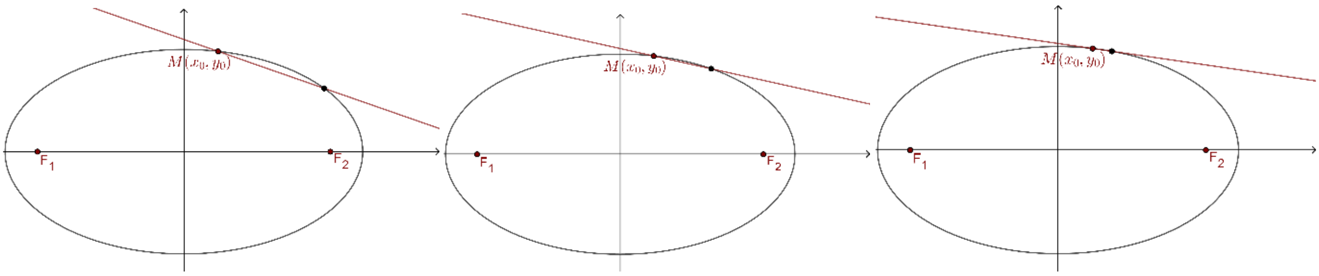

Рис. 13

Предельное положение секущей, при котором вторая точка совпадет с первой, называется касательной к эллипсу в точке M_0. Касательная имеет с эллипсом только одну общую точку (рис. 14).

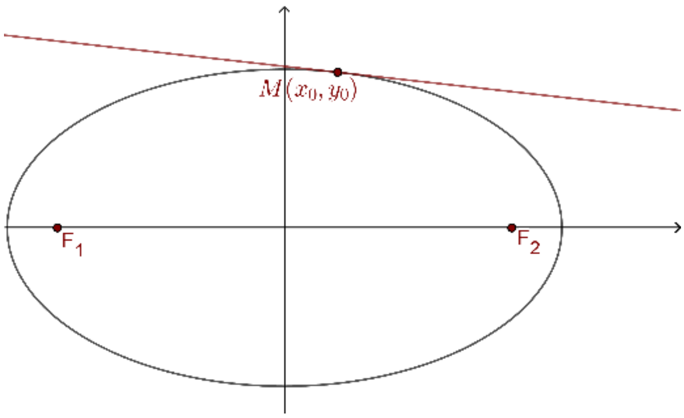

Рис. 14

Касательная к эллипсу в точке $M_0(x_0, y_0)$ задается уравнением

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1.$$

В частности, в вершине эллипса с координатами (0; b) уравнение касательной (рис. 15) примет вид

$$\frac{0}{a^2}x + \frac{b}{b^2}y = 1 \quad \text{или} \quad y = b.$$

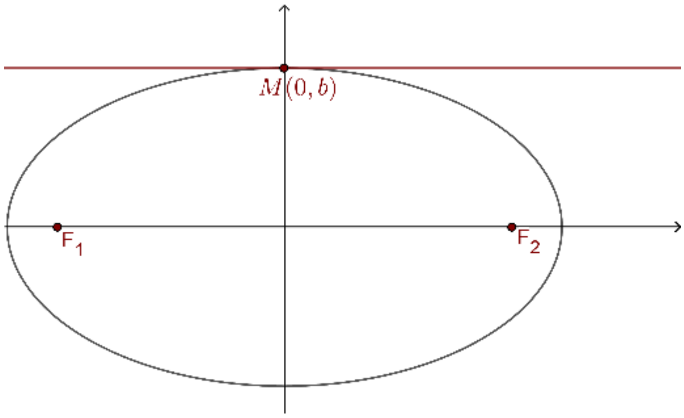

Рис. 15

Значит, верхняя сторона опорного прямоугольника касается эллипса в его вершине. Аналогичным образом можно доказать, что все стороны опорного прямоугольника касаются эллипса.

Рассмотрим интересное оптическое свойство эллипса. Если в один из фокусов поместить источник излучения, то все лучи, отразившись от эллипса, соберутся во втором фокусе (рис. 16).

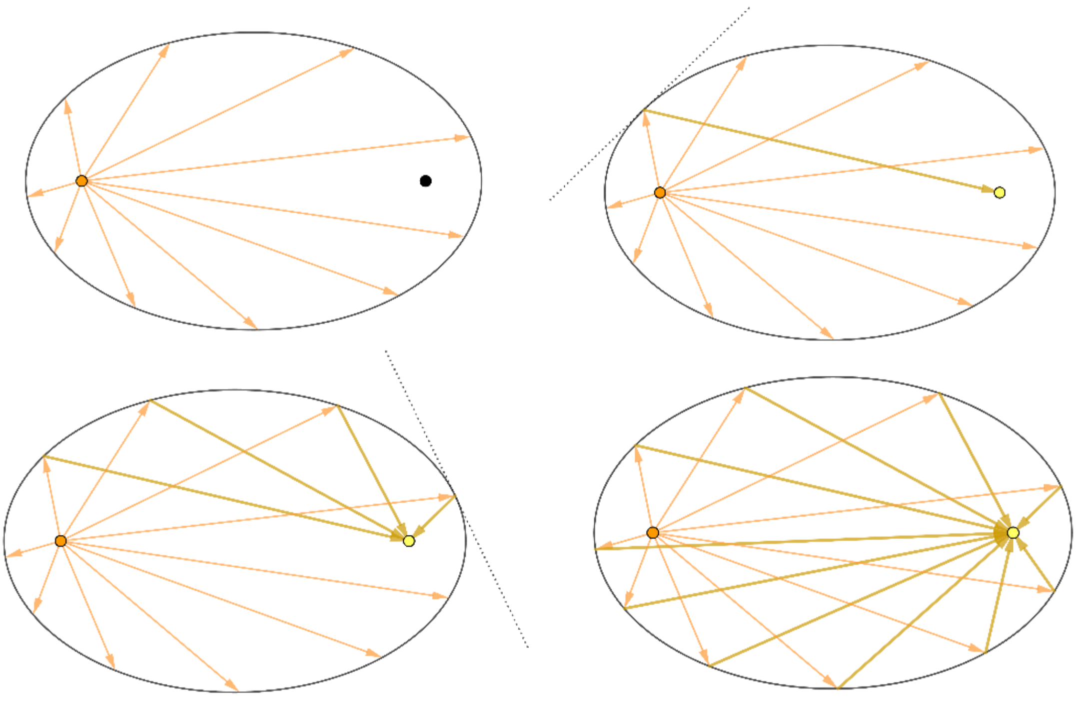

Рис. 16

При вращении эллипса вокруг прямой, проходящей через фокусы, получается пространственная фигура (рис. 17), называемая эллипсоидом вращения.

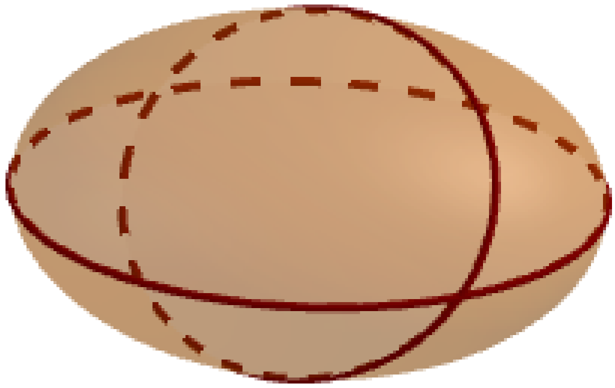

Рис. 17

В каждом сечении плоскостью, проходящей через ось вращения, будут равные эллипсы с общими фокусами, поэтому эллипсоид обладает таким же оптическим свойством.

Итак, фокус – это место, где одномоментно можно сконцентрировать всю энергию излучения. Это свойство используется, например, в медицине.

Введем важную характеристику – *эксцентриситет*. Это число, равное отношению параметров c и a:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Так как $a > c > 0$, то $0 \leq \varepsilon < 1$.

Рассмотрим некоторые изображения эллипсов с разными эксцентриситетами: рис. 18.

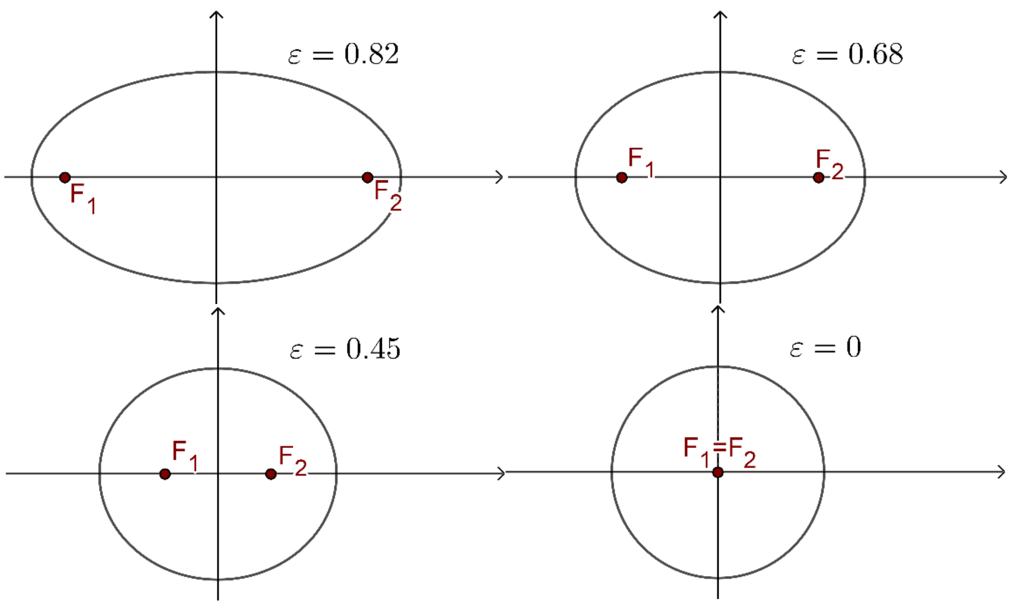

Рис. 18

Чем эксцентриситет больше, тем сильнее эллипс «вытягивается» вдоль оси абсцисс. Дело в том, что если отношение $\frac{c}{a}$ растет, то отношение

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}$$

уменьшается, то есть отличие между a и b становится все больше и больше.

И наоборот, чем ближе эксцентриситет к 0, тем отличие между a и b все менее заметно. В крайнем случае, когда $\varepsilon = 0$, параметры a и b равны, и эллипс становится окружностью.

Рассмотрим преобразование точек плоскости, называемое сжатием к оси. Возьмем ось абсцисс и зафиксируем коэффициент сжатия, равный $\frac{b}{a}$. Само преобразование обозначим буквой f.

Каждой точке M с координатами (x, y) поставим в соответствие точку с координатами (x', y'), такими, что $x = x'$, $y = \frac{a}{b}y'$, то есть первая координата не изменяется, а вторая координата умножается на постоянный коэффициент.

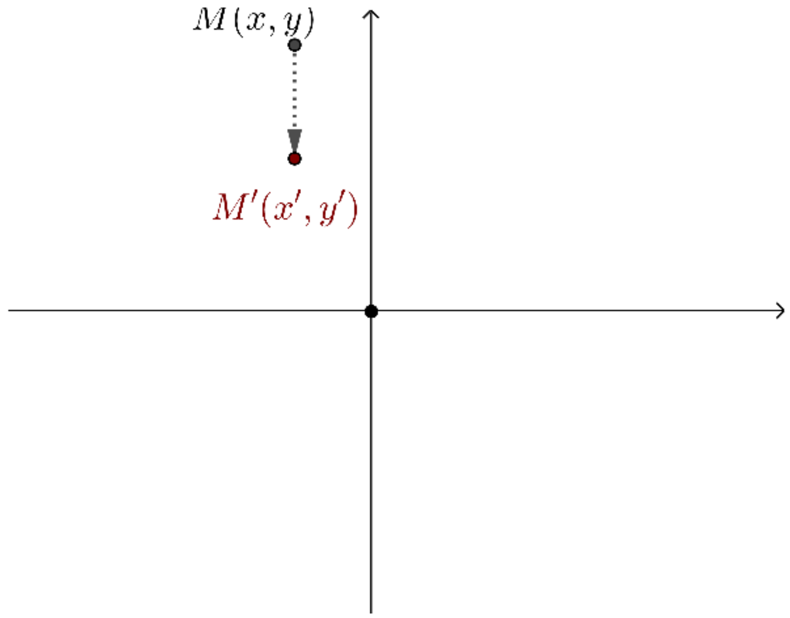

Рис. 19.

Рассмотрим окружность радиуса a. После выполнения преобразования f точки окружности перейдут в точки некоторой другой линии (рис. 20).

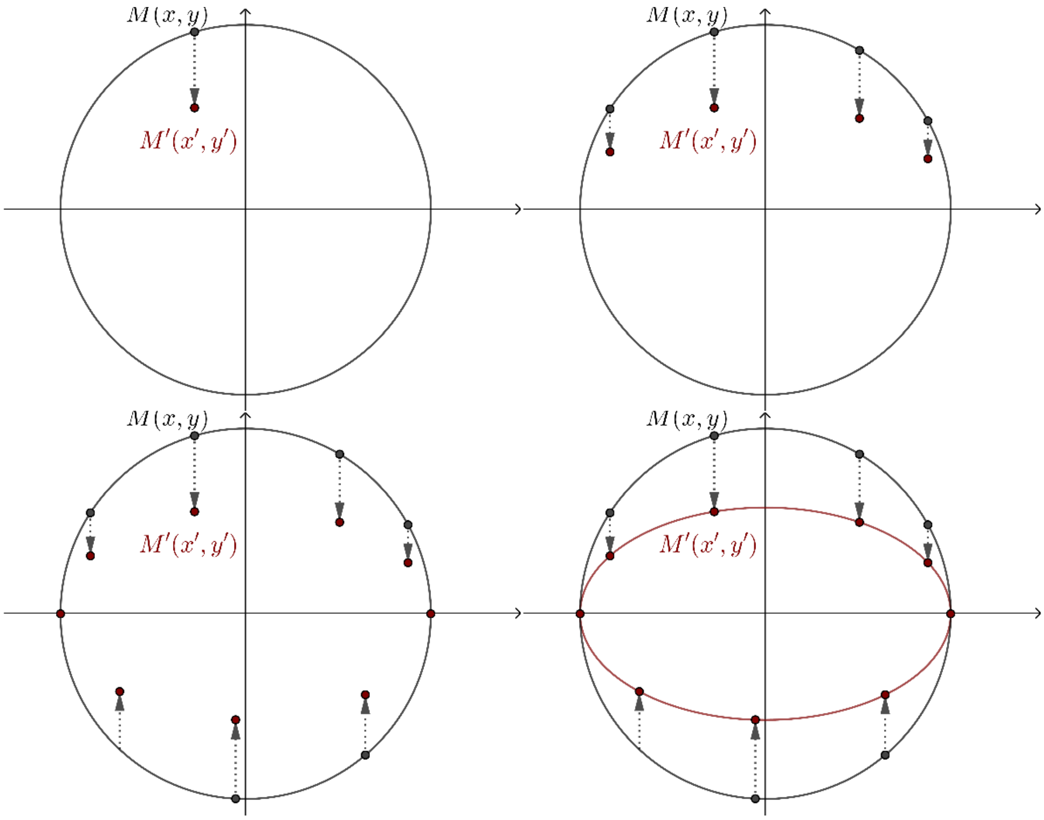

Рис. 20

Покажем, что полученная линия есть эллипс с полуосями a и b.

Возьмем каноническое уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$. Каждая точка $M(x, y)$, удовлетворяющая этому уравнению, перейдет в новую точку $M'(x', y')$. Чтобы определить, какому уравнению будут удовлетворять координаты точки M', выразим x, y через x', y' и подставим в уравнение окружности:

$$x = x',\ y = \frac{a}{b} y'$$

$$\Rightarrow\ x'^2 + \left(\frac{ay\prime}{b}\right)^2 = a^2\ \ |: a^2$$

$$\Rightarrow\ \frac{x\prime^2}{a^2} + \frac{y\prime^2}{b^2} = 1.$$

Это уравнение эллипса.

Итак, применив преобразование сжатия с коэффициентом $\frac{b}{a}$ к окружности радиуса a в канонической системе координат, получим эллипс с полуосями a и b. Таким образом, любой эллипс можно получить из окружности с помощью преобразования сжатия.

Мы также знаем, что окружность можно задать системой параметрических равенств

$$\begin{cases} x\ \ = a\cos t \\ y\ \ = a\sin t\,. \\ t \in [0,2\pi] \end{cases}$$

Выполнив сжатие с коэффициентом $\frac{b}{a}$, система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} x' & = a\cos t \\ \frac{ay\prime}{b} & = a\sin t \\ t \in [0,2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' & = a\cos t \\ y' & = b\sin t \\ t \in [0,2\pi] \end{cases}.$$

Значит, любой эллипс может быть задан параметрически, полученной системой равенств

$$\begin{cases} x' & = a\cos t \\ y' & = b\sin t \\ t \in [0,2\pi] \end{cases}.$$