Справочник 15.

Уравнение плоскости.
Взаимное расположение прямой и плоскости

Общее уравнение плоскости – уравнение

$$ax + by + cz + d = 0,$$

в котором $a \neq 0$, или $b \neq 0$, или $c \neq 0$ $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$.

Неколлинеарные точки плоскости – точки, не лежащими на одной прямой

Два направляющих вектора плоскости – неколлинеарные векторы, параллельными этой плоскости.

Нормальный вектор плоскости – ненулевой вектор, перпендикулярный этой плоскости.

Геометрически плоскость α может быть однозначно задана:

1. тремя неколлинеарными токами;
2. точкой на плоскости α и двумя направляющими векторами плоскости;
3. точкой на плоскости α и нормальным вектором плоскости.

Система параметрических уравнений плоскости, заданной точкой $M_0(x_0,\ y_0, z_0)$ и двумя направляющими векторами $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1 \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3 \end{cases}, \text{ где } u, v \in R.$$

Уравнение плоскости, , заданной точкой $M_0(x_0,\ y_0, z_0)$ и двумя направляющими векторами $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, в канонической форме:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости, заданной тремя точками $M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости, определенной точкой $M_0(x_0,\ y_0, z_0)$ и нормальным вектором $\vec{n}(a, b, c)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Если плоскость задана общим уравнением $ax + by + cz + d = 0$, то коэффициент при переменных – это координаты одного их нормальных векторов этой плоскости:

$\vec{n}(a, b, c)$ – нормальный вектор плоскости $ax + by + cz + d = 0$.

Пусть в системе координат известны уравнения двух плоскостей α_1 и α_2:

$$\alpha_1 \leftrightarrow a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$\alpha_2 \leftrightarrow a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Возможны следующие случаи:

1. *Плоскости пересекаются* по прямой:

$$\cos\angle(\alpha_1,\ \alpha_2) = |\cos\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})|,\ \cos\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}.$$

При этом

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \ \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow a_1\cdot a_2 + b_1\cdot b_2 + c_1\cdot c_2 = 0.$$

2. *Плоскости параллельны*, либо *совпадают*, если

$$(a_1, b_1, c_1) = k(a_2, b_2, c_2\ ),$$

При этом

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow (a_1, b_1, c_1, d_1) = k(a_2, b_2, c_2, d_2\ ).$$

Пусть плоскость α определена общим уравнением $ax + by + cz + d = 0$.

Пусть прямая l задана точкой $M_0(x_0,\ y_0, z_0)$ и направляющим вектором $\vec{l}(l_1, l_2, l_3)$.

Возможны следующие случаи:

1. *Прямая пересекает плоскость* $\Leftrightarrow\ al_1 +\ bl_2 + cl_3 \neq 0$.
2. *Прямая параллельна плоскости*, то есть не имеет с ней ни одной общей точки $\Leftrightarrow$

$$al_1 +\ bl_2 + cl_3 = 0,\ \text{но}\ ax_0\ +\ by_0\ +\ cz_0\ +\ d\ \neq\ 0.$$

3. *Прямая лежит в плоскости* $\Leftrightarrow$

$$al_1 +\ bl_2 + cl_3 = 0\ \ \text{и}\ ax_0\ +\ by_0\ +\ cz_0\ +\ d\ =\ 0.$$