Практическое занятие.

Уравнение прямой на плоскости

Задача 1. Выяснить взаимное расположение прямых, заданных уравнениями $18x + 6y - 17 = 0$ и $5x + 10y - 9 = 0$. Вычислить угол между этими прямыми.

Решение. Вспомним, что нормальный вектор прямой $ax + by + c = 0$ имеет координаты $(a; b)$. При этом любой вектор, коллинеарный этому, также будет нормальным по отношению к этой прямой.

Рассмотрим нормальные векторы данных прямых:

$$(18;\ 6) \parallel \underbrace{(3; 1)}_{\overrightarrow{n_1}}, \quad (5;\ 10) \parallel \underbrace{(1; 2)}_{\overrightarrow{n_2}}.$$

Так как координаты $(3; 1)$ и $(1; 2)$ не пропорциональны, то нормальные векторы не коллинеарны, то есть прямые пересекаются. Угол между этими прямыми можно найти разными способами.

1 способ. Косинус угла между прямыми равен модулю косинуса угла между их нормальными векторами (вместо нормальных векторов можно взять направляющие векторы).

Пусть α – угол между данными прямыми, φ – угол между нормальными векторами $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$. Тогда $\cos\alpha = |\cos\varphi|$. Модуль возникает из-за того, что угол между векторами может быть тупым, а угол между прямыми не превосходит 90°.

Вычислим: $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{3+2}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Значит, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

2 способ. Представим прямые как графики линейных функций:

$$18x + 6y - 17 = 0 \Rightarrow 6y = -18x + 17 \Rightarrow y = \underbrace{-3}_{k_1}x + \frac{17}{6};$$

$$5x + 10y - 9 = 0 \Rightarrow 10y = -5x + 9 \Rightarrow y = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{k_2}x + \frac{9}{10}.$$

Используем формулу $\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$. Вычисляем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{-3+\frac{1}{2}}{1+(-3)(-\frac{1}{2})}\right| = \left|\frac{-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}}\right| = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Ответ. Прямые пересекаются. Угол между ними 45°.

Задача 2. Даны две точки $A(2; 3)$ и $B(6; -5)$. Составить:

а) уравнение прямой (AB);

б) уравнение серединного перпендикуляра к отрезку AB.

Решение. а) Находим уравнение прямой по двум точкам:

$\frac{x-2}{6-2} = \frac{y-3}{-5-3} \Rightarrow \frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{-8}$ – каноническое уравнение прямой.

Приведем уравнение к общему виду:

$$-8(x-2) = 4(y-3) \Rightarrow 8x + 4y - 28 = 0 \Rightarrow \underline{2x + y - 7 = 0}.$$

б) Серединный перпендикуляр l к отрезку AB – это прямая, перпендикулярная к отрезку AB, проходящая через его середину.

Вектор $\overrightarrow{AB}(4; -8)$ является нормальным вектором прямой l.

Середина AB – это точка M с координатами $\left(\frac{2+6}{2}; \frac{3-5}{2}\right) = (4; -1)$.

Составляем уравнение прямой по точке $M(4; -1)$ и нормальному вектору $\overrightarrow{AB}(4; -8)$:

$$4(x-4) - 8(y+1) = 0 \Rightarrow 4x - 8y - 8 = 0 \Rightarrow \underline{x - 2y - 2 = 0}.$$

Ответ. а) $2x + y - 7 = 0$; б) $x - 2y - 2 = 0$.

Задача 3. Прямая l задана уравнением $2x + 5y + 3 = 0$. Дана точка $M(-3; 7)$. Составить:

а) уравнение прямой, проходящей через M параллельно l;

б) уравнение прямой, проходящей через M перпендикулярно l.

Решение. а) (2; 5) – нормальный вектор прямой l. Он также будет нормальным вектором для прямой, параллельной l. Составляем уравнение прямой по точке $M(3; 7)$ и нормальному вектору $\vec{n}(2; 5)$:

$$2(x+3) + 5(y-7) = 0 \Rightarrow \underline{2x + 5y - 29 = 0}.$$

б) Нормальный вектор прямой l будет направляющим для прямой, перпендикулярной l. Составляем уравнение прямой по точке $M(-3; 7)$ и направляющему вектору $\vec{p}(2; 5)$:

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-7}{5} \Rightarrow 5x + 15 = 2y - 14 \Rightarrow \underline{5x - 2y + 29 = 0}.$$

Ответ. а) $2x + 5y - 29 = 0$; б) $5x - 2y + 29 = 0$

Задача 4. Получить формулу, выражающую расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$.

Решение. Расстояние от точки M до прямой l – это длина перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l. Пусть H – основание этого перпендикуляра. Надо найти длину отрезка MH. Обозначим эту длину через d.

Точка H имеет некоторые координаты $(x; y)$, удовлетворяющие равенству $ax + by + c = 0$, так как H принадлежит данной прямой.

Пусть $\vec{n}$ – нормальный вектор данной прямой. Так как отрезок MH перпендикулярен прямой, то вектор $\overrightarrow{MH}$ коллинеарен вектору $\vec{n}$. Тогда модуль скалярного произведения этих векторов равен произведению их длин:

$$\left|\overrightarrow{MH}\cdot\vec{n}\right| = \left|\overrightarrow{MH}\right|\cdot|\vec{n}| = d\cdot|\vec{n}| \Rightarrow d = \frac{\left|\overrightarrow{MH}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|} \text{ (*).}$$

Учитывая координаты векторов $\overrightarrow{MH}(x-x_0; y-y_0)$, $\vec{n}(a;b)$, вычисляем:

$$\overrightarrow{MH}\cdot\vec{n} = (x-x_0)a + (y-y_0)b = ax + by - ax_0 - by_0 = -c - ax_0 - by_0,$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Подставляем в равенство (*), учитывая знак модуля, получаем формулу:

$$d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ответ. $d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.