Практическое занятие 11.

Скалярное произведение векторов

Задача 1. Пусть $|\vec{a}| = 7$ и $|\vec{b}| = 5$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $90°$. Найдем скалярное произведение $(3\vec{a} + 2\vec{b})(4\vec{b} - \vec{a})$.

Решение. Применив свойства скалярного произведения, раскроем скобки:

$$(3\vec{a} + 2\vec{b})(4\vec{b} - \vec{a}) = 12\vec{a}\vec{b} - 3\vec{a}^2 + 8\vec{b}^2 - 2\vec{b}\vec{a} = 10\vec{a}\vec{b} - 3\vec{a}^2 + 8\vec{b}^2.$$

Так как угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $90°$, то $\vec{a}\vec{b} = \vec{0}$.

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 7^2 = 49, \ \vec{b}^2 = \left|\vec{b}\right|^2 = 5^2 = 25.$$

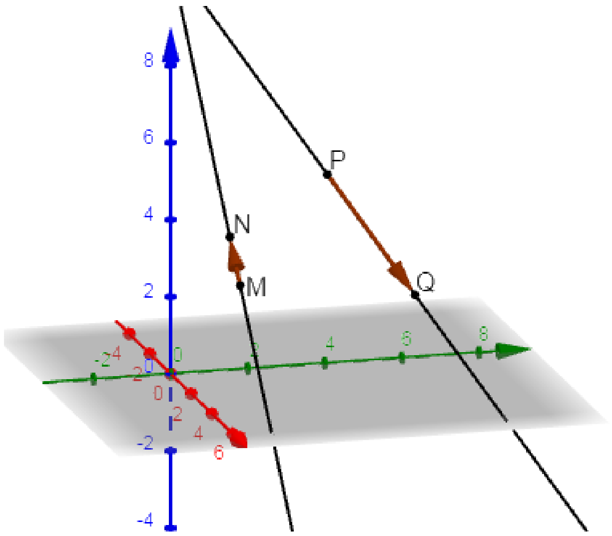
Поэтому

$$(3\vec{a} + 2\vec{b})(4\vec{b} - \vec{a}) = -3\vec{a}^2 + 8\vec{b}^2 = -3 \cdot 49 + 8 \cdot 25 = -147 + 200 = 63.$$

Ответ. 63.

Задача 2. Даны четыре точки $M(3; 1; 3)$, $N(2; 1; 4)$, $P(4; 3; 6)$, $Q(5; 5; 3)$. Найти угол между прямыми MN и PQ.

Решение. Прямая MN определяет вектор $\overrightarrow{MN}$, прямая PQ – вектор $\overrightarrow{PQ}$.



Если прямые пересекаются, то углом между прямыми называется наименьший из углов, образованных при пересечении этих прямых. Если прямые скрещиваются, то угол между ними – это угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.

Пусть φ – угол между векторами $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$.

Тогда угол между прямыми MN и PQ равен углу φ, если этот угол острый или прямой, либо равен $180^{\circ} - \varphi$, если φ тупой.

Вычислим косинус угла φ, используя операцию скалярного произведения векторов:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{PQ}|}.$$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{MN}(-1;0;1)$, $\overrightarrow{PQ}(1;2;-3)$. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{-1+0-3}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1+4+9}} = \frac{-4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}} = -\frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Так как $\cos\varphi$ отрицателен, то φ тупой. Косинус угла между прямыми MN и PQ равен $\cos(\pi-\varphi) = \frac{2}{\sqrt{7}}$, значит, $\angle\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}\right) = \arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$.

Ответ. $\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$.

Задача 3. В некоторой ПДСК заданы радиус-векторы вершин треугольника ABC : $\overrightarrow{OA}\ (1,\ 2,\ 3)$, $\overrightarrow{OB}\ (3,\ 2,\ 1)$, $\overrightarrow{OC}(1,\ 4,\ 1)$. Покажите, что треугольник ABC равносторонний. Найдите его площадь.

Решение. Вычислим длины сторон треугольника. Для этого найдем координаты векторов, являющихся сторонами треугольника *ABC*, затем определим их длины.

Координаты вершин треугольника:

$$\overrightarrow{OA} \leftrightarrow A(1,\ 2,\ 3),$$
$$\overrightarrow{OB} \leftrightarrow B(3,\ 2,\ 1),$$
$$\overrightarrow{OC} \leftrightarrow C(1,\ 4,\ 1).$$

Поэтому $\overrightarrow{AB}(2;0;-2)$, $\overrightarrow{BC}(-2;2;0)$, $\overrightarrow{AC}(0;2;-2)$. Тогда

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8},$$
$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8},$$
$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8}.$$

Так как длины всех сторон равны, треугольник равносторонний.

Площадь треугольника вычислим двумя способами.

1 способ. Воспользуемся формулой площади равностороннего треугольника, известной из школьного курса математики:

$$S_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \text{ где } a \text{ – длина стороны.}$$

Поэтому $S_\Delta = \frac{8\cdot\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$.

2 способ. Применим общую формулу для площади треугольника, построенного на векторах $\vec{b} = \overrightarrow{AB}(2;0;-2)$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AC}(0;2;-2)$:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{\vec{b}^2\cdot\vec{c}^2 - (\vec{b}\cdot\vec{c})^2}.$$

Вычисляем:

$$\vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 8,\ \ \vec{b}\cdot\vec{c} = 2\cdot 0 + 0\cdot 2 + (-2)\cdot(-2) = 4.$$

Поэтому

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{8\cdot 8 - (4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{64-16} = \frac{1}{2}\sqrt{48} = 2\sqrt{3}.$$

Ответ. $S_\Delta = 2\sqrt{3}$.

Задача 4. В пространстве задана ПДСК. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если он коллинеарен вектору $\vec{b}(3,\ 2,\ 1)$ и его скалярное произведение на вектор $\vec{b}$ равно 3.

Решение. Пусть $\vec{a}(x, y, z)$.

Так как $\vec{a}||\vec{b}$, то координаты этих векторов пропорциональны, поэтому

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \text{для некоторого числа } t.$$

Тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3t \cdot 3 + 2t \cdot 2 + t \cdot 1 = 9t + 4t + t = 14t.$$

По условию $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$, значит, $14t = 3$, откуда $t = \frac{3}{14}$.

Итак, $\begin{cases} x = 3 \cdot \frac{3}{14} = \frac{9}{14} \\ y = 2t = 2 \cdot \frac{3}{14} = \frac{3}{7} \\ z = t = \frac{3}{14} \end{cases}$.

Координаты вектора $\vec{a}$ найдены: $\vec{a}\left(\frac{9}{14}; \frac{3}{7}; \frac{3}{14}\right)$.

Ответ. $\vec{a}\left(\frac{9}{14}; \frac{3}{7}; \frac{3}{14}\right)$.