Декартова система координат

На лекции введем понятия ортонормированного базиса и декартовой системы координат. Вначале вспомним основные понятия и утверждения, рассмотренные на предыдущих лекциях.

Ранее мы уже работали с геометрическими векторами. Вектор в геометрии – это объект, определяемый направлением и длиной. Изображается вектор направленным отрезком. Вектор можно отложить от любой точки (рис. 1).

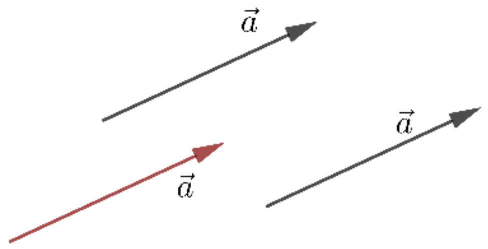

Рис. 1

Через $\mathbf{E}_2$ обозначаем множество всех векторов, параллельных некоторой плоскости. Через $\mathbf{E}_3$ обозначаем множество всех векторов пространства. Множество E_2 является двумерным векторным пространством, E_3 – трехмерным векторным пространством.

Напомним важное определение базиса. Два или более векторов называются линейно зависимыми, если среди них есть вектор, являющийся линейной комбинацией остальных векторов. Система, состоящая из одного нулевого вектора, также считается линейно зависимой.

Если векторы не являются линейно зависимыми, они называются линейно независимыми.

Базис системы векторов – это такая линейно независимая подсистема, через которую выражается любой вектор данной системы.

Известно, что в пространстве E_2 базис образуют любые два неколлинеарных вектора. Например, взяв неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, произвольный вектор $\vec{v}$ можно выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$, используя операции сложения векторов и умножения вектора на число. Если отложить базисные векторы от одной точки и взять вектор $\vec{v}$, не коллинеарный $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то $\vec{v}$ будет являться диагональю параллелограмма, стороны которого лежат на прямых, содержащих векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Итак, любой вектор является линейной комбинацией векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

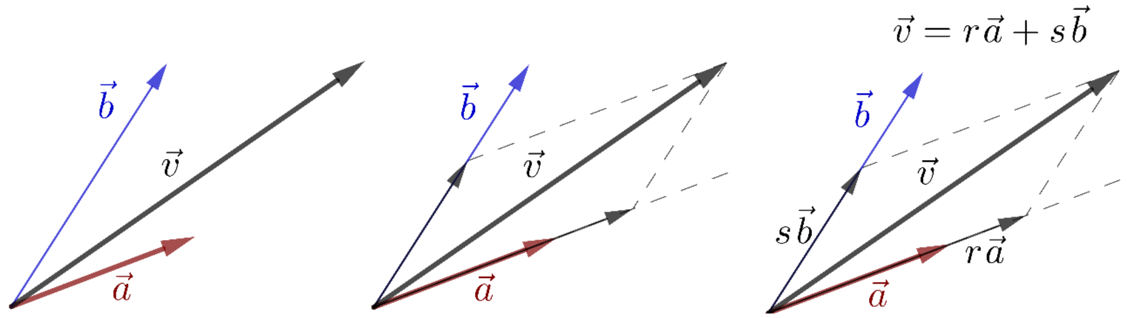

Рис 2

В пространстве E_3 базис образуют любые три некомпланарных вектора. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ от одной точки. Тогда любой вектор $\vec{v}$ можно представить в виде линейной комбинации данных векторов. Если $\vec{v}$ не компланарен никаким двум базисным векторам, то он является диагональю параллелепипеда, стороны которого лежат на прямых, содержащих эти векторы.

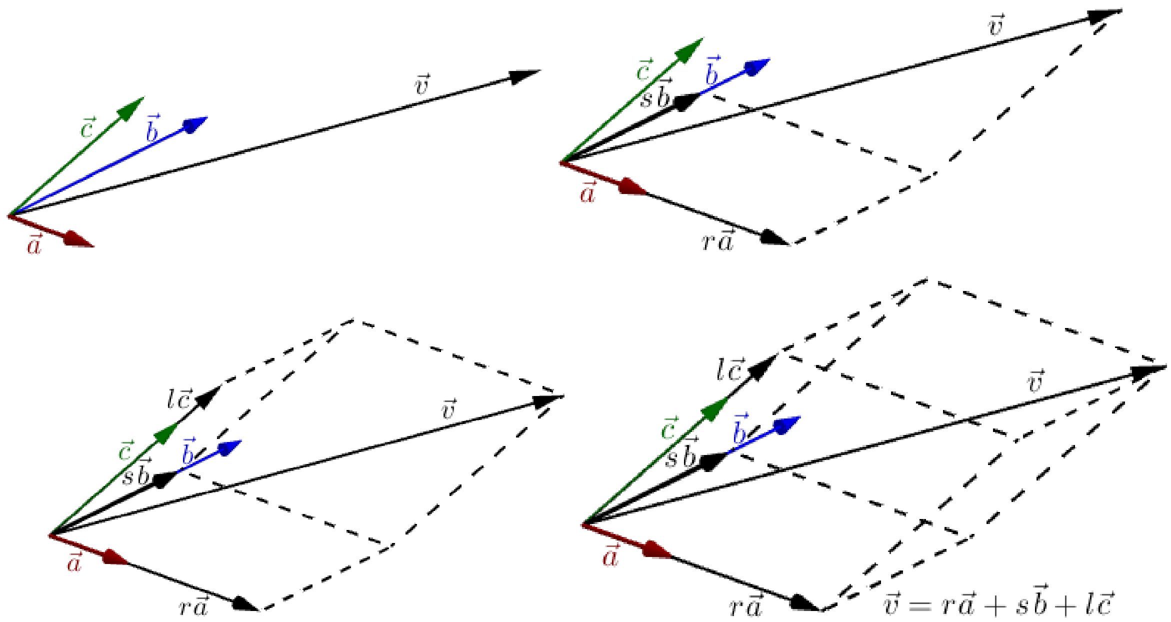

Рис 3

Известно, что любой вектор разлагается по базису однозначно. Коэффициенты разложения вектора по базису называются координатами вектора в этом базисе. Итак, при зафиксированном базисе, каждый вектор однозначно определяется своими координатами, то есть упорядоченной n-кой чисел. Для базиса $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ двумерного пространства получаем пару координат:

$$\vec{a} = r_1\overrightarrow{e_1} + r_2\overrightarrow{e_2} \leftrightarrow (r_1, r_2),$$

Для базиса $e_1,\ e_2,\ e_3$ трехмерного пространства – тройку координат:

$$\vec{a} = r_1\overrightarrow{e_1} + r_2\overrightarrow{e_2} + r_3\overrightarrow{e_3} \leftrightarrow (r_1, r_2,\ r_3).$$

В дальнейшем, говоря о координатах, будем использовать ортонормированный базис. Определим, что это такое. Возьмем два вектора $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$, угол между которыми 90°:

$$\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}.$$

Такие векторы называют ортогональными (или перпендикулярными). Также требуем, чтобы длины этих векторов были равны 1:

$$|\vec{\imath}| = 1,\ |\vec{\jmath}| = 1\ .$$

Полученный базис векторов $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$ в E_2 называют ортонормированным (рис. 4).

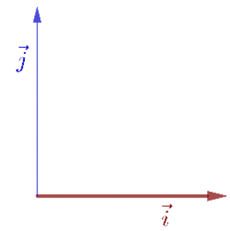

Рис. 4

Аналогично определяется ортонормированный базис в пространстве E_3 (рис. 5). Его образуют три вектора $\vec{\imath},\ \vec{\jmath}, \vec{k}$, попарно ортогональных (угол между каждыми двумя из этих векторов 90 градусов) и единичных $(|\vec{\imath}| = 1,\ |\vec{\jmath}| = 1,\ |\vec{k}| = 1)$.

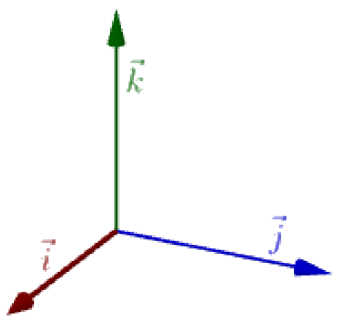

Рис. 5

Итак, каждый вектор в ортонормированном базисе имеет координаты. Чтобы определить координаты точки, введем понятие системы координат. Вначале рассмотрим пространство E_2.

Берем ортонормированный базис и фиксируем точку O (начало координат), от которой откладываем векторы $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$. Каждый из базисных векторов задает свою ось координат. Ось, направленная вдоль вектора $\vec{\imath}$ обозначается как $0x$ и называется осью абсцисс, вторая ось, направленная вдоль вектора $\vec{\jmath}$, обозначается через $0y$ и называется осью ординат (рис 6.).

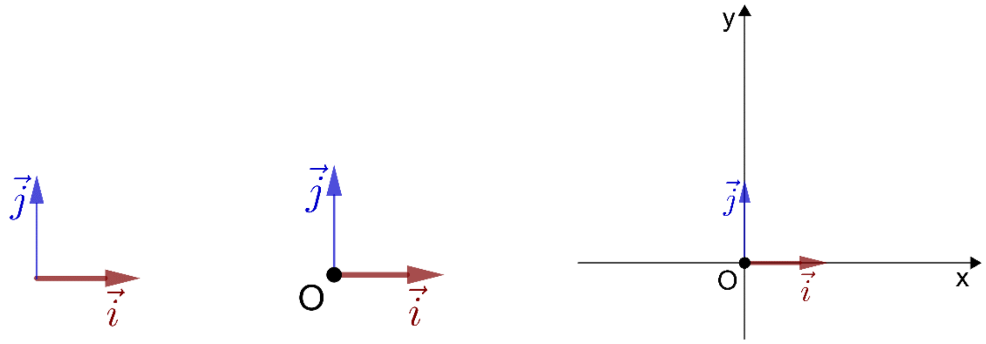

Рис. 6

Получаем систему координат, называемую прямоугольной декартовой системой координат (ПДСК):

$$\text{в } \mathrm{E}_2\text{: } \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\ -\text{ ортонормированный базис и точка } 0 \leftrightarrow \text{ПДСК.}$$

Термин «прямоугольная» подчеркивает, что базис ортонормированный. Такую систему координат также называют декартовой, в честь Рене Декарта, французского математика 17 века, который считается одним из основателей аналитической геометрии.

Возьмем произвольную точку A и рассмотрим вектор $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, который называется радиус-вектором точки A. Опустим из точки A перпендикуляры на оси координат. Точки A_x и A_y называются проекциями точки A на оси $0x$ и $0y$. (рис. 7).

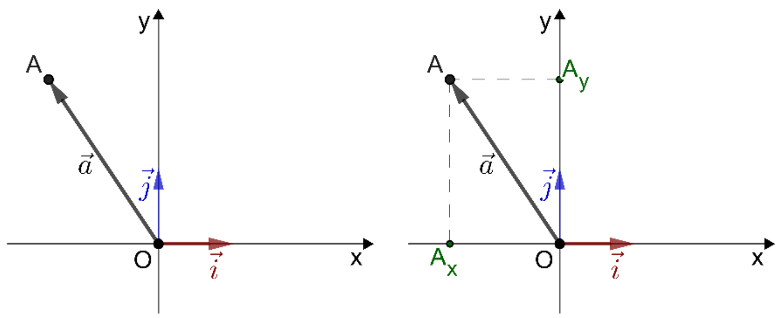

Рис. 7

Проекции A_x и A_y задают координаты точки А:

$$A_x \to a_1 = \begin{cases} \left|\overrightarrow{OA_x}\right|, \text{если } \overrightarrow{OA_x} \uparrow\uparrow \vec{\imath} \\ -\left|\overrightarrow{OA_x}\right|, \text{если } \overrightarrow{OA_x} \uparrow\downarrow \vec{\imath} \end{cases},\quad A_y \to a_2 = \pm\left|\overrightarrow{OA_y}\right|.$$

Числа $a_1,\ a_2$ часто называют проекциями вектора $\vec{a}$ на оси Ox и Oy.

Первая координата (абсцисса) точки A может быть найдена по формуле

$$a_1 = |\vec{a}|\cos(\vec{a}\,\hat{}\,Ox),$$

где под знаком косинуса стоит угол между вектором $\vec{a}$ и положительным направлением оси Ox (рис. 8).

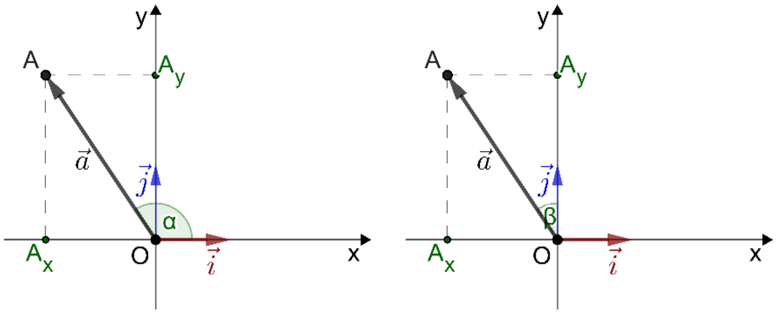

Рис. 8

Для данного на рисунке примера это угол α, он тупой, поэтому косинус угла отрицательный, то есть, координата a_1 меньше 0. Вторая координата точки A (ордината) вычисляется по аналогичной формуле

$$a_2 = |\vec{a}|\cos(\vec{a}{}^\wedge Oy),$$

где под знаком косинуса стоит угол между данным вектором и осью Oy. В нашем примере имеем острый угол, поэтому косинус положителен и координата a_2 больше 0.

Проекции точки A определяют соответствующие векторы $\overrightarrow{OA_x}$ и $\overrightarrow{OA_y}$, их тоже называют проекциями вектора $\vec{a}$ на оси координат (рис. 9).

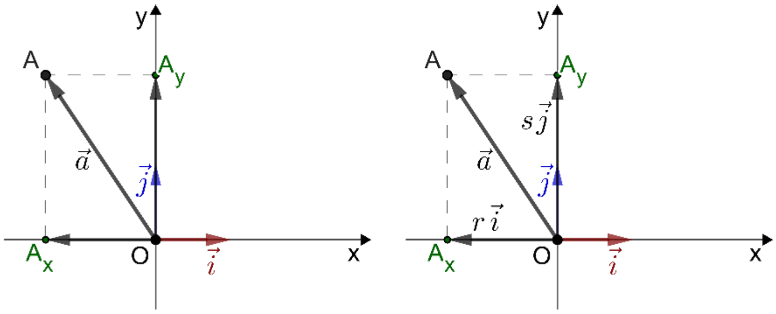

Рис. 9

Исходный вектор $\vec{a}$ равен сумме своих проекций. Каждая проекция вектора есть вектор, коллинеарный базисному. Поэтому $\vec{a}$ – это линейная комбинация векторов $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} = r\vec{\imath} + s\vec{\jmath}\,.$$

При этом коэффициент r либо равен длине вектора–проекции, либо имеет противоположное значение длины. Все зависит от того, сонаправлена или противоположно направлена проекция по отношению к вектору $\vec{\imath}$. В нашем примере число r отрицательное, так как проекция на ось абсцисс противоположно направлена с вектором $\vec{\imath}$. Итак,

$$r = a_1.$$

Аналогичным свойством обладает коэффициент s:

$$s = a_2.$$

Теорема. *Прямоугольные координаты* r, s *вектора* $\vec{a}$ *равны проекциям* a_1, a_2 *этого вектора на оси* Ox, Oy.

Координаты точки – это координаты ее радиус-вектора.

Теперь введем понятие прямоугольной декартовой системы координат в трехмерном пространстве E_3. Действуем по аналогии с плоскостью.

Берем ортонормированный базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, фиксируем точку – начало координат, от нее откладываем базисные векторы. Появляется третья ось Oz, называемая осью аппликат. Каждые две оси образуют координатные плоскости (Oxy), (Oyz) и (Oxz) (рис. 10).

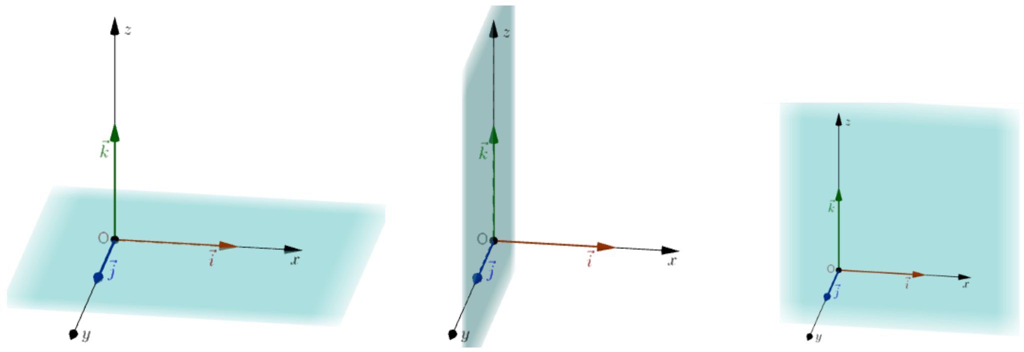

Рис. 10

Возьмем произвольную точку и соответствующий ей радиус-вектор. Определим понятие проекции. Проведем через точку А плоскость, перпендикулярную оси абсцисс. Она пересечет эту ось в некоторой точке A_x (рис. 11).

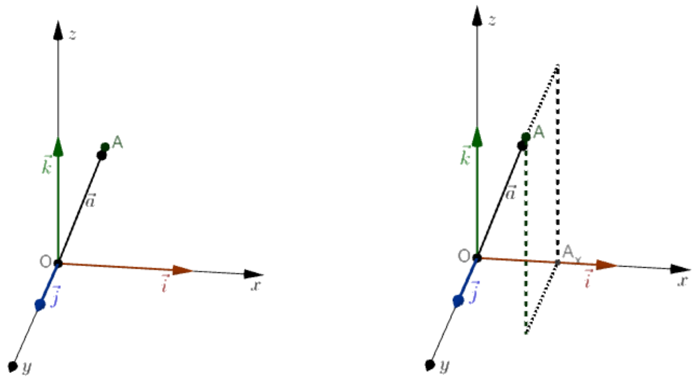

Рис. 11

Точку A_x называют проекцией точки А на ось *Ox*.

Аналогично определяются остальные проекции (рис. 12).

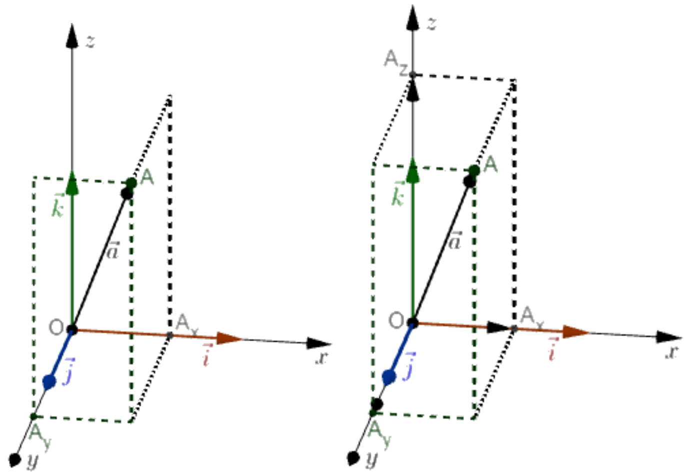

Рис. 12

Указанные проекции определяют координаты a_1, a_2, a_3 точки A. Значения координат могут быть вычислены по аналогичным формулам:

$$a_1 = |\vec{a}|\cos(\vec{a}^\wedge Ox), a_2 = |\vec{a}|\cos(\vec{a}^\wedge Oy), a_3 = |\vec{a}|\cos(\vec{a}^\wedge Oz).$$

Координаты a_1, a_2, a_3 точки A называют проекциями вектора на оси координат Ox, Oy и Oz. Векторы $\overrightarrow{OA_x}$, $\overrightarrow{OA_y}$ и $\overrightarrow{OA_z}$ также называются проекциями вектора $\vec{a}$. Сам вектор $\vec{a}$ будет являться суммой своих проекций:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} + \overrightarrow{OA_z} = r\vec{i} + s\vec{j} + l\vec{k}.$$

Коэффициенты разложения вектора по данному базису – это координаты вектора. Так же, как на плоскости, выполняется

Теорема. *Прямоугольные координаты r, s, l вектора $\vec{a}\,(r, s, l)$ равны проекциям этого вектора на оси Ox, Oy, Oz.*

Координаты точки равны координатам ее радиус-вектора.

Как в любом векторном пространстве, в геометрических пространствах E_2 и E_3 выполняется

Теорема. *При сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.*

Сформулируем и проиллюстрируем еще несколько теорем.

Теорема. *Пусть у вектора $\overrightarrow{MN}$ известны координаты его начальной и конечной точки. Тогда координаты вектора находятся по простому правилу: надо из координат точки N вычесть соответствующие координаты точки M. Это правило справедливо и для плоскости, и для пространства.*

Действительно, пусть даны точки $M(m_1, m_2)$ и $N(n_1, n_2)$ (рис. 13).

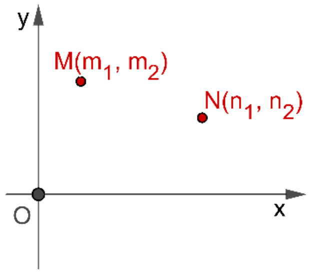

Рис. 13

Рассмотрим радиус-векторы точек M и N (рис. 14).

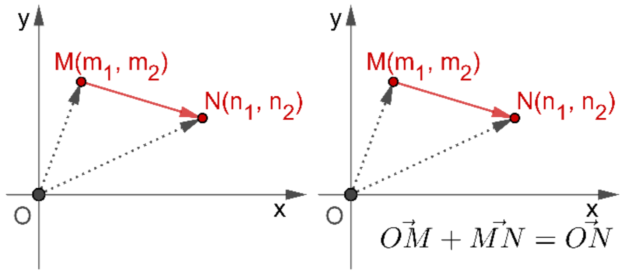

Рис. 14

Представим вектор $\overrightarrow{MN}$ как разность радиус-векторов точек N и M:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{MN}(n_1 - m_1,\ n_2 - m_2).$$

Становится очевидным, почему следует находить разность координат в таком порядке.

Следующее правило позволяет находить координаты середины отрезка (как на плоскости, так и в трехмерном пространстве).

Теорема. *Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат концов этого отрезка.*

Возьмем середину S отрезка MN, где $M(m_1,\ m_2)$, $N(n_1,\ n_2)$ (рис. 15)

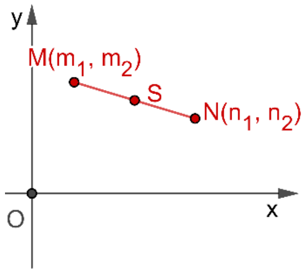

Рис. 15

Рассмотрев радиус-векторы данных точек, можно построить параллелограмм, в котором вектор $\overrightarrow{OS}$ является половиной диагонали OK (рис. 16).

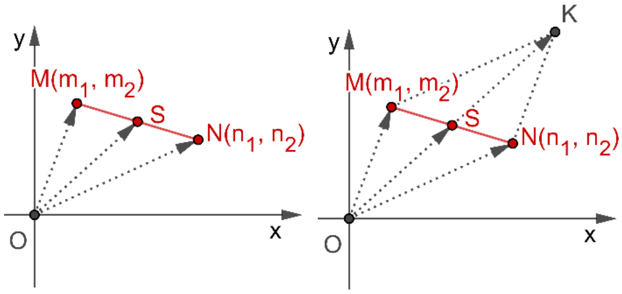

Рис. 16

Вектор $\overrightarrow{OK}$ – это сумма векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$, координаты которых, как известно, совпадают с координатами точек M и N (рис. 17).

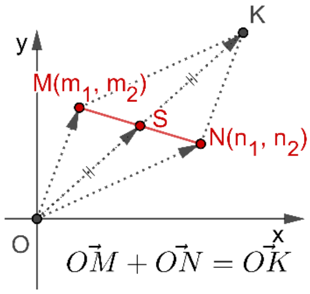

Рис. 17

Получаем,

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) \Rightarrow S(\frac{m_1 + n_1}{2}, \frac{m_2 + n_2}{2}).$$

Нам известна

Теорема. *Векторы линейно зависимы в точности тогда, когда матрица их координат вырождена.*

Отсюда вытекают такие утверждения.

Два вектора коллинеарны в точности тогда, когда их координаты пропорциональны, что равносильно линейной зависимости этих векторов. Получаем, что для плоскости *два вектора коллинеарны в точности тогда*, *когда определитель, составленный из их координат, равен 0*:

$$\vec{a}(a_1, a_2)||\vec{b}(b_1, b_2) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{координаты } (a_1, a_2), \ (b_1, b_2) \text{ пропорциональны.}$$

Для пространства имеем:

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_2), \vec{b}(b_1, b_2, b_2), \vec{c}(c_1, c_2, c_2) \text{ компланарны} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим далее связь координат точки в разных СК.

Пусть даны две ПДСК (рис. 18).

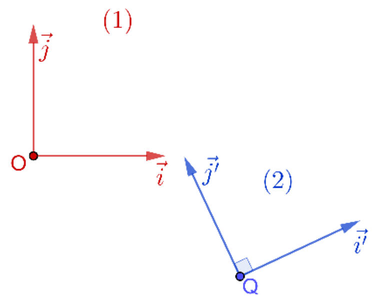

Рис. 18

Первая ПДСК задана базисом $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ и точкой O, вторая – базисом $\vec{\imath'}$, $\vec{\jmath'}$ и точкой Q:

$$(1)\ O, \vec{\imath}, \vec{\jmath} \text{ и } (2)\ Q, \overrightarrow{\imath'}, \vec{\jmath'}.$$

Допустим вначале, что переход от первого базисного вектора ко второму осуществляется в одном направлении, например, против часовой стрелки (рис. 19).

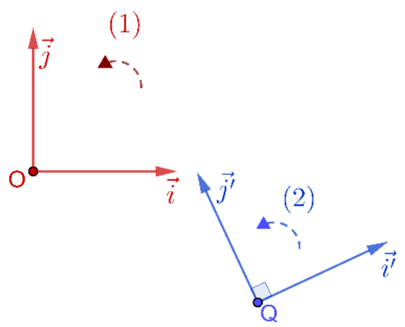

Рис. 19

В этом случае говорят, что базисы одинаково ориентированы.

Взаимное расположение базисов в СК (1) и (2) определяется углом $\vec{\imath}^\wedge\vec{\imath'}$ между первыми векторами этих базисов. Отложим все базисные векторы от точки O. Затем отложим угол α между $\vec{\imath}$ и $\vec{\imath'}$ в том же направлении, в котором ориентирована СК (1), то есть в направлении от $\vec{\imath}$ к $\vec{\jmath}$ (рис. 20).

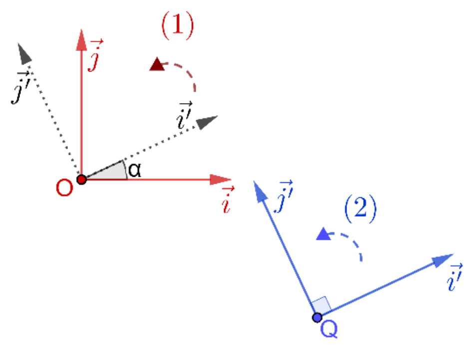

Рис. 20

Определим координаты векторов второго базиса в первом базисе.

Так как базисные векторы единичные, то на основе определений тригонометрических функций получаем, что абсцисса вектора $\vec{i'}$ равна cos α, а ордината – это sin α. Координаты вектора $\vec{j'}$ будут равны (–sin α; cos α). Это следует, например, из формул приведения, учитывая, что угол между $\vec{i}$ и $\vec{j'}$ равен α + 90°. Также значения этих координат можно найти, рассмотрев два прямоугольных треугольника с гипотенузами $\vec{i'}$ и $\vec{j'}$ на рисунке 21.

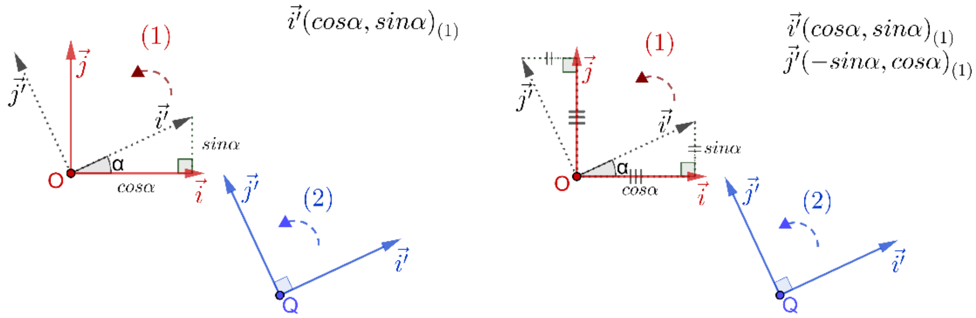

Рис. 21

Пусть точка Q в СК (1) имеет координаты $(x_0,\ y_0)$.

Возьмем произвольную точку M и найдем связь между ее координатами в данных СК. Обозначим координаты в СК (1) через $(x,\ y)$, в СК (2) – через (x', y') (рис. 22).

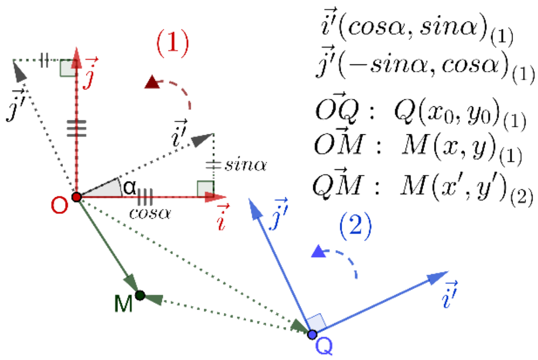

Рис. 22

Представим вектор $\overrightarrow{OM}$ в виде суммы двух векторов (по правилу треугольника):

$$\binom{x}{y}_{(1)} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{OQ} + (x'\vec{i'} + y'\vec{j'}).$$

Запишем полученное равенство в матричной форме, расположив координаты векторов в столбец.

$$\binom{x}{y}_{(1)} = \overrightarrow{OQ}_{(1)} + \left(x'\vec{i'} + y'\vec{j'}\right)_{(1)} = \binom{x_0}{y_0}_{(1)} + x'\binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}_{(1)} + y'\binom{-\sin\alpha}{\cos\alpha}_{(1)}.$$

Имеем

$\binom{x}{y} = \binom{x_0}{y_0} + x' \binom{\cos\alpha}{\sin\alpha} + y' \binom{-\sin\alpha}{\cos\alpha}$, если (1) и (2) ориентированы одинаково.

Аналогично рассматривается второй случай, когда базисы ориентированы противоположно. В этом случае в одной системе переход от первого ко второму вектору осуществляется по часовой стрелке, а в другой системе – против часовой стрелки (рис. 23).

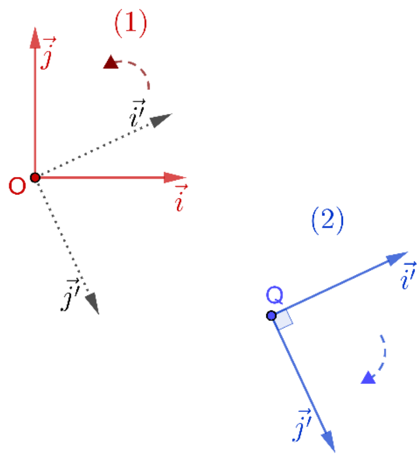

Рис. 23

Отметим, что угол α между $\vec{\imath}$ и $\vec{\imath'}$ откладываем также в направлении, в котором ориентирована СК (1), то есть от $\vec{\imath}$ к $\vec{\jmath}$ (рис. 24).

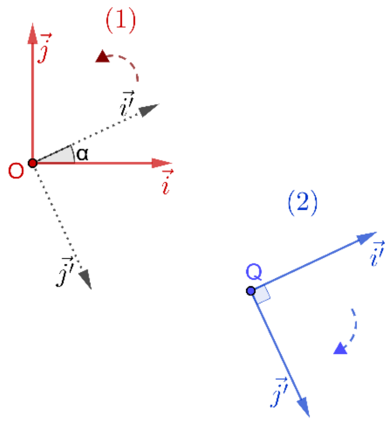

Рис. 24

Отличие в этом случае заключается в координатах вектора $\vec{\jmath'}$. Угол между $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath'}$ будет равен α – 90º. Далее действуем аналогично первому случаю (рис. 25).

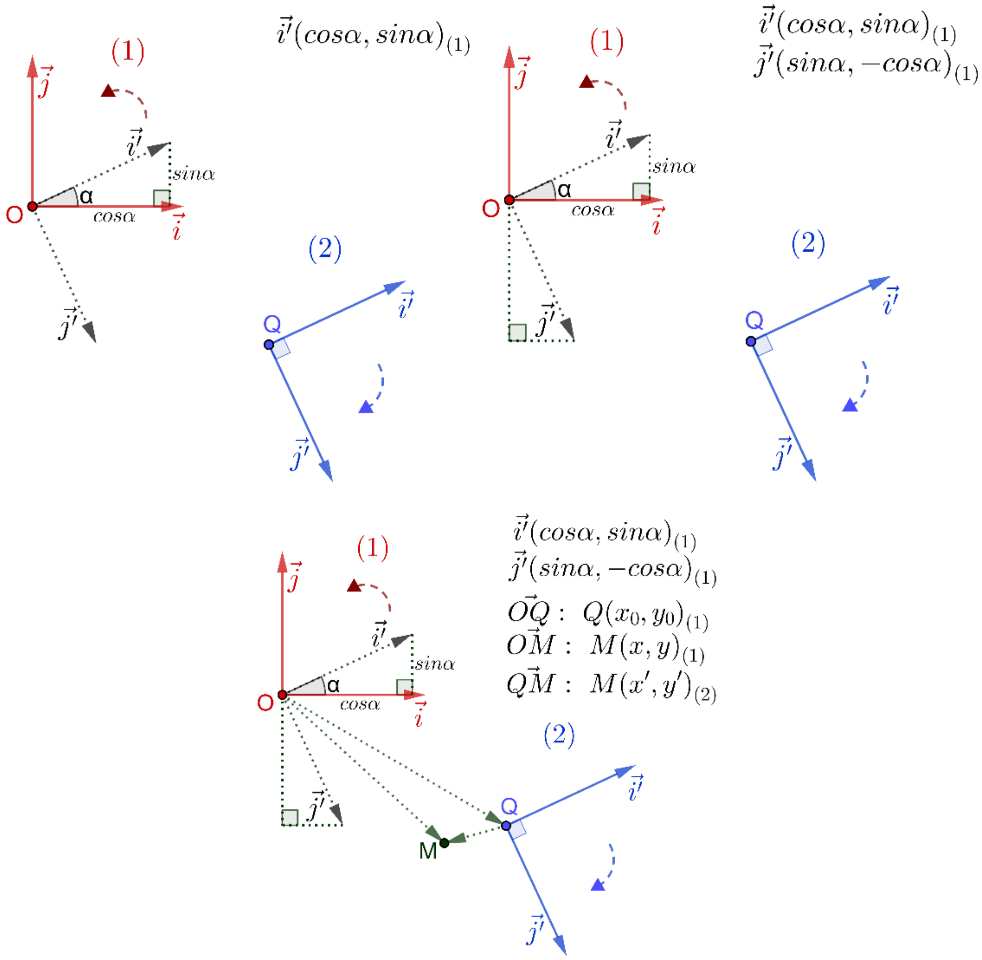

Рис. 25

Получаем похожую формулу:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(1)} = \overrightarrow{OQ}_{(1)} + \left(x'\vec{i}' + y'\vec{j}'\right)_{(1)} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}_{(1)} + x' \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}_{(1)} + y' \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}_{(1)}.$$

Итак,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + x' \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix},$$

если (1) и (2) ориентированы противоположно.

Полученные в обоих случаях равенства можно записать в едином виде, если ввести коэффициент e, который равен 1 в первом случае (для одинаково ориентированных базисов), и (–1) во втором случае:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & e(-\sin\alpha) \\ \sin\alpha & e\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$e = \begin{cases} 1 & \text{для одинаковой ориентации} \\ -1 & \text{для разной ориентации базисов} \end{cases}.$$

Квадратная матрица, записанная во втором слагаемом, называется матрицей перехода между базисами.

Вспомним, что матрицы равны, если их соответствующие элементы равны. Если перейти от равенства матриц к равенству их соответствующих элементов, то получим следующую систему, связывающую координаты одной точки в разных СК:

$$\begin{cases} x = x_0 + x'\cos\alpha - ey'\sin\alpha \\ y = x_0 + x'\sin\alpha + ey'\cos\alpha \end{cases}.$$

Рассмотрим на плоскости еще одну систему координат, называемую полярной.

Эта система задается точкой (полюсом), лучом с началом в точке O (называемой полярной осью), положительной ориентацией (обычно против часовой стрелки) (рис. 26).

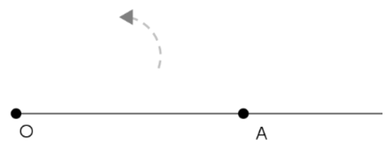

Рис. 26

Для каждой точки M на плоскости зададим длину r вектора $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ (это число называют полярным радиусом точки M) и ориентированный (полярный) угол α между полярной осью и вектором $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

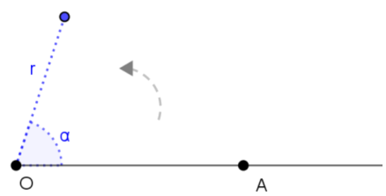

Рис. 27

Пара чисел $(r,\ \alpha)$ однозначно определяет точку M. Имеем полярные координаты точки M (рис. 28).

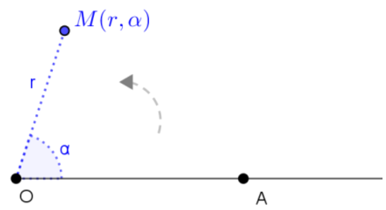

Рис. 28

Полярный радиус полюса считается равным 0, а полярный угол этой точки не определен.

Отметим также, что если для заданной точки M с координатами $(r,\ \alpha)$ рассмотреть точку N, симметричную относительно полярной оси, то она будет иметь координаты $(r,\ -\alpha)$ (рис. 29).

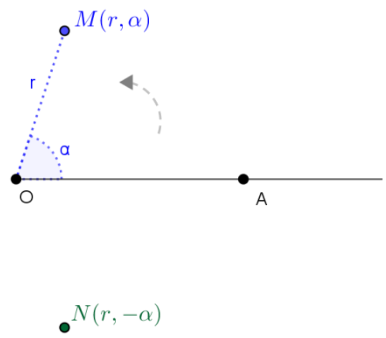

Рис. 29

Укажем возможный переход от полярной системы координат к ПДСК.

Пусть задана полярная система (рис. 30).

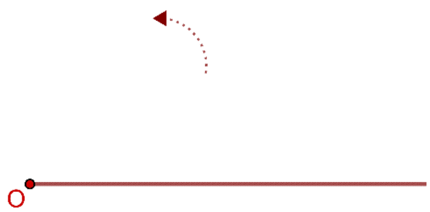

Рис. 30

Зададим ПДСК, соответствующую данной ПСК.

В качестве начала координат выберем полюс, базисный вектор $\vec{i}$ определим, направив его вдоль полярной оси, вектор $\vec{j}$ получается поворотом $\vec{i}$ на 90° (рис. 31).

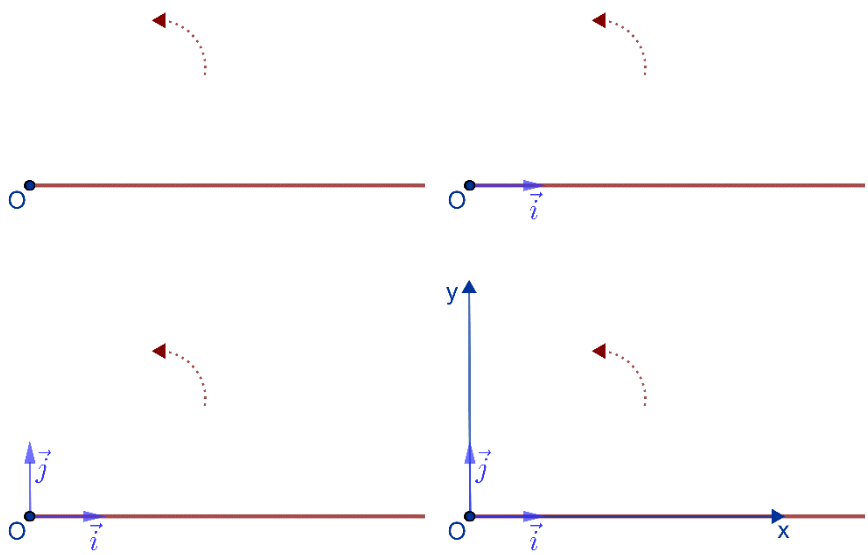

Рис. 31

Возьмем точку M с полярными координатами $(r,\ \alpha)$ (рис. 32).

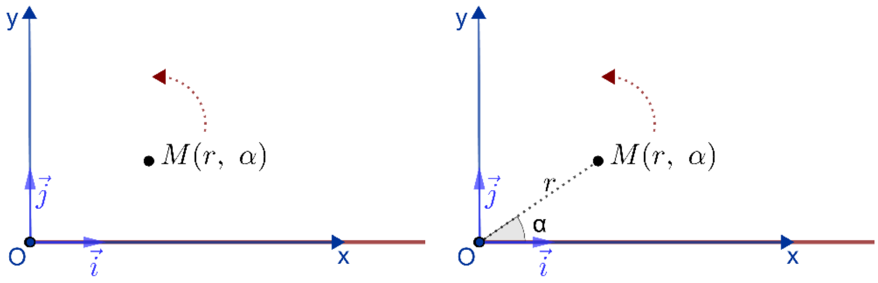

Рис. 32

Найдем связь полярных координат $M(r,\ \alpha)$ с ее прямоугольными координатами $M(x_0,\ y_0)$.

Учитывая определения тригонометрических функций угла α (рис. 33),

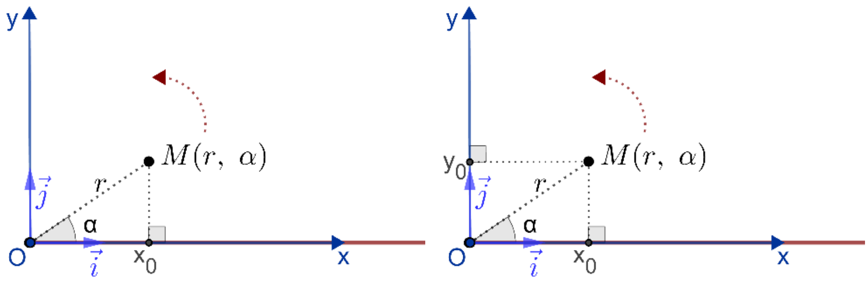

Рис. 33

получаем, что проекции точки M выражаются через r и α по указанным формулам:

$$x_0 = r \cdot cos\alpha \text{ и } y_0 = r \cdot sin\alpha.$$

Итак, полярные координаты однозначно задают прямоугольные координаты точки.

Нетрудно получить обратную зависимость:

$$r \ = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\,,$$

$$r \neq 0 \ \Rightarrow \ cos\,\alpha = \frac{x_0}{r}\,, sin\,\alpha = \frac{y_0}{r}.$$

Здесь, чтобы выразить радиус r, мы возвели обе части полученных ранее равенств в квадрат и сложили их. Тогда тригонометрические функции угла α мы выразим через прямоугольные координаты и радиус r. Из этих равенств можно найти требуемый угол α с точностью до полного оборота круга 2π.