Определения 8.

Операции над матрицами

Размер матрицы – число ее строк и столбцов. Обозначения матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right) = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} = A_{m\times n}.$$

Равные матрицы – матрицы, которые имеют одинаковые размеры, и все соответствующие элементы этих матриц равны: $A = \left(a_{ij}\right)$ равна $B = \left(b_{ij}\right) \Leftrightarrow$ равны их размеры и элементы $a_{ij} = b_{ij}$.

$M_{m\times n} = \left\{\left(a_{ij}\right) \mid a_{ij} \in \mathbb{R}\right\}$ – множество всех матриц фиксированного размера. $M_{n\times n} = M_n$.

Суммой матриц одинакового размера называется матрица, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов исходных матриц: если $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$, то $A + B = \left(c_{ij}\right)_{m\times n}$, где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(i = 1, \ \ldots, m;\ j = 1, \ldots, \ n)$.

Нулевая матрица – матрица, все элементы которой равны 0. Обозначим ее жирной цифрой ноль: $\mathbf{0}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Противоположной матрицей к $A = \left(a_{ij}\right)$ называется матрица $-A = \left(-a_{ij}\right)$, все элементы которой противоположны соответствующим элементам матрицы A.

Свойства сложения матриц:

Пусть A, B, C – произвольные матрицы размера m на n. Тогда:

1. Сложение коммутативно (матрицы можно складывать в любом порядке): $A + B = B + A$,
2. Сложение ассоциативно (порядок расстановки скобок не имеет значения): $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. Для нулевой матрицы размера m на n выполняется равенство: сумма нулевой матрицы с A равно A: $A + \mathbf{0}_{m\times n} = A$.
4. Сумма матрицы A и противоположной ($-A$) равно нулевой матрице: $A + (-A) = \mathbf{0}_{m\times n}$.

Операция вычитания определена для любых матриц одинакового размера:

$$\text{если } A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in M_{m\times n},$$

$$\text{то } A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}.$$

Умножение числа на матрицу (или матрицу на число) соответствует умножению каждого элемента матрицы на это число:

$$\text{если } r \in \mathbb{R},\ \ A = (a_{ij})_{m\times n},$$

$$\text{то } rA = (c_{ij})_{m\times n},$$

$$\text{где } c_{ij} = r \cdot a_{ij}\ (i = 1,\ \dots, m;\ j = 1, \dots, n).$$

Свойства операции умножения матрицы на число:

1) $1A = A$;

2) $(rs)A = r(sA)$;

3) $(r + s)A = rA + sA$ и $r(A + B) = rA + rB$ (законы дистрибутивности).

Теорема. *множество $M_{m\times n}$ всех матриц фиксированного размера образует векторное пространство.*

Транспонированная матрица A^T по отношению к матрице A получается из A заменой всех строк на соответствующие столбцы: если $A = (a_{ij})_{m\times n}$, то $A^T = (c_{ij})_{n\times m}$, где $c_{ij} = a_{ji}$ $(i = 1,\ \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$.

Свойства операции транспонирования:

1) выполнив последовательно две операции транспонирования, мы получим исходную матрицу: $(A^T)^T = A$;

2) если транспонировать сумму матриц A+B, то получится матрица, равная сумме транспонированных матриц–слагаемых: $(A + B)^T = A^T + B^T$;

3) при транспонировании матрицы rA получается матрица, равная произведению числа r и транспонированной матрицы A: $(rA)^T = rA^T$;

4) ранг транспонированной матрицы равен рангу исходной матрицы; другими словами, базис системы векторов–строк состоит из такого же числа векторов, сколько их в базисе системы векторов–столбцов: $Rank(A) = Rank(A^T)$.

Операция умножения матриц определена, лишь когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. В результате умножения матрицы A на B получится матрица C, каждый элемент c_{ij} которой вычисляется по определенному правилу: если $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$, то $AB = (c_{ij})_{m\times p}$, где $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ $(i = 1, \ \dots, m; \ j = 1, \ \dots, p)$.

Кратко говорят, что для вычисления элемента c_{ij} надо i-ую строку матрицы A умножить на j-ый столбец матрицы B. Разберемся, что означает эта фраза.

Берем i-ую строку в матрице A, это последовательность элементов $a_{i\,1}, a_{i\,2}, \dots, a_{i\,n}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Берем j-ый столбец в матрице B, имеем последовательность $b_{1\,j}, b_{2\,j}, \dots, b_{n\,j}$:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

В силу условия, накладываемого на размеры матриц, количество чисел в строке и столбце одинаковое. Каждый элемент строки умножаем на соответствующий элемент столбца, затем складываем полученные произведения:

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j\text{–й столбец} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{array} \; i\text{–я строка}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Рассмотрим пример. Умножим $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ размера 2×3 на $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ размера 3×2. В результате получится матрица 2×2.

Вычислим элемент c_{11}. Для этого строку $(1 \quad 3 \quad 1)$ умножаем на столбец $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$: $1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 2$.

Найдем c_{12}. Для этого первую строку $(1 \quad 3 \quad 1)$ из A умножим на второй столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ из B, получим: $1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0$.

Далее вычисляем:

$c_{21} = (2 \quad 0 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 + 0 + 12 = 16$,

$c_{22} = (2 \quad 0 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 + 0 + 8 = 10$.

Имеем матрицу $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}$.

Отметим свойства операции умножения матриц. Вначале скажем, какое свойство в общем случае не выполняется. Операция умножения матриц не коммутативна, то есть важно, в каком порядке мы умножаем матрицы:

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Может так случиться, что матрицу A на B умножить можно, а B на A – нельзя. Например, $A_{1\times2} \cdot B_{2\times3}$ определено, а в обратном порядке умножение $B_{2\times3}$ на $A_{1\times2}$ произвести нельзя. Но даже в случае квадратных матриц, когда определены оба произведения, их результаты могут не совпадать.

Теперь перечислим равенства, которые выполняются всегда, когда матрицы имеют соответствующий размер.

1. Результат умножения не зависит от расстановки скобок (если не изменять порядок матриц), то есть умножение ассоциативно: $(AB)C = A(BC)$.
2. Справедливы два дистрибутивных закона, позволяющих раскрывать скобки: $A(B + C) = AB + AC$ и $(A + B)C = AC + BC$.
3. Имеет место равенства $r(AB) = (rA)B = A(rB)$, показывающие, что число можно внести в сомножители (или вынести из произведения).

4. Для единичной матрицы $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ соответствующего размера имеет место равенство $A \cdot E = A = E \cdot A$, где $E, A \in M_n$.

Обратная к квадратной матрице A – такая матрица, которая в произведении с A (в любом порядке) дает единичную матрицу: $A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$.

Матричная форма записи СЛУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \leftrightarrow A \cdot X = B,$$ где A – основная матрица системы, X – столбец неизвестных, B – столбец свободных членов.

Теорема. *СЛУ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ее основная матрица имеет обратную*.

Теорема. *Если основная матрица A системы уравнений имеет обратную, то столбец переменных X вычисляется по формуле*:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B.$$

Теорема. *Пусть дана квадратная матрица A. Если к A справа приписать единичную матрицу и выполнить элементарные преобразования (для новой матрицы) так, чтобы A превратилась в единичную, то справа получится матрица, обратная к A.*