Лекция 9.

Определители квадратных матриц

На лекции введем понятие определителя квадратной матрицы. Это понятие эффективно используется при исследовании систем линейных уравнений.

Подойдем к тому, что такое определитель матрицы второго порядка, на основе решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} ax + by = k \\ cx + dy = r \end{cases}.$$

Предположим, что коэффициенты при переменных ненулевые. Выполним указанные элементарные преобразования над системой:

$$\begin{cases} ax + by = k & \cdot c \\ cx + dy = r & \cdot a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} acx + bcy = kc \\ acx + ady = ar & -I \end{cases}.$$

После операции вычитания во втором уравнении останется одна переменная y, ее можно выразить, если коэффициент при этой переменной не равен 0:

$$ady - bcy = ar - kc \;\Rightarrow\; y = \frac{ar - kc}{ad - bc}.$$

Аналогичным образом можно выразить переменную x:

$$\begin{cases} ax + by = k & \cdot d \\ cx + dy = r & \cdot b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} adx + bdy = kd & -II \\ bcx + bdy = br \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{kd-br}{ad-bc}.$$

В случае, если данная СЛУ имеет единственное решение, полученные значения переменных дают единственное решение исходной системы:

$$x = \frac{kd-br}{ad-bc},\; y = \frac{ar-kc}{ad-bc}.$$

Даже если какой-то коэффициент, на который мы умножали, равен 0, формулы останутся справедливыми, главное, чтобы выражение $ad - bc$, стоящее в знаменателе, не обращалось в 0. Если же знаменатель дробей обращается в 0, то система либо несовместна, либо имеет бесконечно много решений.

Итак, если система имеет одно решение, то оно может быть найдено по указанным формулам. Но в таком виде формулы сложны для восприятия. Однако все три выражения, записанные в числителях и знаменателях дробей, вычисляются по единому правилу в соответствии с их матрицей. Значение подобных выражений и называют определителем соответствующей матрицы второго порядка.

В знаменателе записан определитель основной матрицы системы:

$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \Delta$ – определитель матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Для того чтобы его найти, надо перемножить два числа по диагонали a, d (эту диагональ называют главной), и вычесть произведение чисел по другой диагонали b, c (эту диагональ называют побочной).

В числителе у выражения для переменной x записан определитель матрицы, получаемой заменой столбца коэффициентов при x на столбец свободных членов:

$$kd - br = \begin{vmatrix} k & b \\ r & d \end{vmatrix} = \Delta_x.$$

Аналогично, числитель $ar - kc$ в формуле для y получается по матрице, в которой столбец при y заменен на столбец свободных членов:

$$ar - kc = \begin{vmatrix} a & k \\ c & r \end{vmatrix} = \Delta_y.$$

Выражение решений системы по записанным формулам называется правилом Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Мы продемонстрировали, как получаются такие формулы для случая системы 2х2. Оказывается, что эти формулы верны для любой системы уравнений, основная матрица которой является квадратной и ее определитель не равен 0. Чтобы пользоваться этими формулами, надо ввести понятие определителя для любой квадратной матрицы.

Итак, мы знаем, что такое определитель матрицы второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Приведем пример вычисления:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) = 11.$$

В самом простом случае, когда имеем матрицу первого порядка, составленную из одного элемента, ее определитель полагают равным этому числу:

$$|a| = |(a)| = a.$$

Обозначение определителя такой матрицы совпадает с обозначением модуля числа. Но в нашем контексте смысл этого выражения другой. Можно обозначить определитель формально: сначала рассмотреть матрицу, заключив таблицу в круглые скобки, а затем поставив вертикальные скобки, обозначающие ее определитель. Но для простоты записи, круглые скобки обычно не ставят:

$$|(-1)| = -1.$$

Теперь рассмотрим матрицу третьего порядка. Определитель такой матрицы вычисляется по следующей формуле, для запоминания которой используют следующие схемы:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & t \end{vmatrix} = ayt + bzu + cxv - (cyu + azv + bxt).$$

Рассмотрим первые три слагаемые. Каждое из них есть произведение трех элементов матрицы. В одном произведение перемножаются элементы главной диагонали матрицы:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & t \end{vmatrix},$$

а в других произведениях – числа, являющиеся вершинами двух условных треугольников:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & t \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & t \end{vmatrix}.$$

Теперь рассмотрим три слагаемых в скобках. Если скобки раскрыть, то перед каждым произведением появится знак минус. Одно произведение получается из трех множителей, расположенных на побочной диагонали матрицы:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & t \end{vmatrix},$$

множители других произведений – это опять же вершины двух других условных треугольников:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & t \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & t \end{vmatrix}.$$

Чтобы не искать указанные треугольники, можно использовать другую схему.

Для записи первых трех произведений (со знаком «+»), дублируем первые два столбца матрицы, которые следует записать справа; тогда множители – это числа стоящие на главной диагонали исходной матрицы, и на двух параллельных ей условных прямых:

$$\underbrace{ayt + bzu + cxv}$$

$$+\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & t \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ x & y \\ u & v \end{matrix}.$$

Аналогично, чтобы записать три произведения в скобках (при раскрытии которой перед всеми слагаемыми возникнет знак «–»), надо взять числа, стоящие на побочной диагонали матрицы, и на двух параллельных ей условных прямых:

$$\underbrace{(cyu + azv + bxt)}$$

$$-\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & t \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ x & y \\ u & v \end{matrix}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{matrix} = (1 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (-3) \cdot 4) -$$
$$-(3 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \cdot 4 + 2 \cdot (-3) \cdot 1) = -24$$

Оказывается, существует общая формула, позволяющая записать правила вычисления определителей для любой квадратной матрицы. Это правило называют разложением определителя по его строке.

Найдем определитель n-го порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Каждому элементу его матрицы поставим в соответствие определитель матрицы n–1 порядка, получаемой вычеркиванием строки и столбца, в которых находится взятый элемент. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} (обозначается A_{ij}) назовем определитель матрицы, полученной вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца, в которых находится элемент, с учетом знака: перед полученным определителем ставится либо «плюс», либо «минус», в зависимости от четности суммы индексов. Знак «минус» возникает при нечетной сумме индексов.

Тогда определитель матрицы n-го порядка – это число, равное сумме, в которой каждое слагаемое есть произведение элемента первой строки на его алгебраическое дополнение:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \cdots + a_{1n} \cdot A_{1n}.$$

Сформулированное правило позволяет свести вычисление определителя произвольного n-го порядка к определителям меньшего порядка:

$$\Delta_n \mapsto \Delta_{n-1} \mapsto \Delta_{n-2} \mapsto \ \ldots \mapsto \Delta_3 \mapsto \Delta_2 \mapsto \Delta_1.$$

Приведем пример. Вычислим определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ по данному определению, то есть разложением по первой строке. Записываем разложение:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot A_{11} - 1 \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13}.$$

Каждый элемент первой строки умножаем на соответствующее алгебраическое дополнение. Для вычисления алгебраического дополнения вычисляем определители второго порядка, не забывая о знаках. При вычислении A_{12} перед полученным определителем ставим дополнительный знак «–»:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6.$$

Получаем:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot A_{11} - 1 \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13} = 3 \cdot 6 - 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-6) = 9.$$

Теперь рассмотрим основные свойства определителей произвольного порядка. Эти свойства будем иллюстрировать на простых примерах.

1. Если квадратную матрицу транспонировать, то есть взаимно поменять строки на столбцы, то ее определитель не изменится:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

Иными словами, строки и столбцы определителя равноправны.

2. Определитель можно разложить по любой строке, не только по первой. Итак, фиксируем любую строку и составляем сумму, каждое слагаемое которой есть произведение элемента строки на его алгебраическое дополнение. Из этого свойства вытекают два следствия.

При умножении одной строки матрицы на число k, определитель этой матрицы умножается на число k:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Другими словами, если все элементы строки имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя. Действительно, если разложить определитель по рассматриваемой строке, то получится сумма с общим множителем k, и вынесение общего множителя за скобки суммы означает вынесение этого числа за знак определителя.

Во-вторых, если в определителе есть нулевая строка, то, разложив определитель по этой строке, все слагаемые суммы будут равны 0, значит, и сам определитель будет равен 0:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Если к одной строке прибавить другую, умноженную на число, то определитель не изменится:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} -2I = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

В частности, если вычесть из одной строки другую, умноженную на число, определитель не изменится. Отсюда следуют такие утверждения.

Если в определителе есть две одинаковые строки, то он равен 0, так как, вычитая из одной строки равную ей строку, получаем нулевую строку. Если в определителе две строки пропорциональны, то он также равен 0:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Если переставить в определителе две строки местами, он поменяет знак:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Отметим, что во всех указанных выше свойствах 1–4 говорится о преобразованиях строк. Однако свойства останутся справедливы, если производить такие же операции со столбцами, так как по свойству 1 строки и столбцы определителя равноправны.

Указанные свойства позволяют упростить вычисление определителя. С помощью элементарных преобразований можно добиться как можно большего числа нулей в строке или столбце, а затем разложить определитель по этой строке или столбцу. Слагаемые в разложении, соответствующие нулевым элементам, равны 0, поэтому алгебраические элементы для них можно не вычислять. Примеры вычисления определителей с использованием свойств приведем на практическом занятии.

В частности, если элементарными преобразованиями приводить матрицу к ступенчатому виду, то получим так называемую треугольную матрицу. Матрицу называют треугольной, если все ее элементы, находящиеся ниже главной диагонали, равны 0. Если вдруг получится нулевая строка, то значение определителя равно 0. Если же нулевая строка не получится, можно использовать еще одно полезное свойство.

5. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-1) = -2.$$