Операции над матрицами

Задача 1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Вычислите, если возможно, AB, BA.

2. Вычислите матрицу $C = \frac{1}{5}A^2 + A^{\text{т}} - 5E$, где E – единичная матрица второго порядка.

Решение.

1. Произведения AB не существует, так как число столбцов первой матрицы не равно числу столбцов второй матрицы.

Найдем BA=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 8 \\ 1 & 2 \\ -14 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Требуется вычислить $C = \frac{1}{5}A^2 + A^{\text{т}} - 5E$.

$A^2 = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$;

$\frac{1}{5}A^2$=$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 45 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

$A^{\text{т}} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

$-5E = -5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$;

$C = \frac{1}{5}A^2 + A^{\text{т}} + (-5E) = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$+$\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$+$\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Ответ. 1. AB нет, BA=$\begin{pmatrix} -11 & 8 \\ 1 & 2 \\ -14 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Найдите все матрицы X, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то есть такие, что $AX = XA$.

Решение.

Обозначим элементы неизвестной матрицы:

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Распишем левую и правую части матричного уравнения $AX = XA$:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix},$$

$$XA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Две матрицы равны, когда их соответствующие элементы совпадают. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + z = x \\ y + t = x + y \\ z = z \\ t = t \end{cases} \sim \begin{cases} z = 0 \\ t = x \end{cases}, \quad y, x \text{ – любые числа.}$$

Значит, матричному уравнению задачи удовлетворяет бесконечно много матриц вида $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, y, x – любые числа.

Отметим, что найденную матрицу X можно представить в виде линейной комбинации конкретных матриц:

$$X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Ответ. $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, y, x – любые числа.

Задача 3. Выяснить, имеет ли матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ обратную.

Решение.

Строки данной матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Пропорциональны, а значит, линейно зависимы. Матрица с линейно зависимыми строками обратной не имеет.

Ответ. Нет.

Задача 4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Вычислите A^{-1}.

2. Найдите матрицу X из уравнения $XA = B$.

Решение. 1. Вычислим обратную матрицу методом элементарных преобразований.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поменяем две последние строки местами, получим ступенчатую матрицу. Далее приводим ее к единичной.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -II \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку правильности построенной обратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 0 & -1+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 12-12 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Используя результат предыдущего пункта, решим матричное уравнение:

$$XA = B \;\Rightarrow\; X = B \cdot A^{-1}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ. 1. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.