

## Лекция 8.

### Операции над матрицами

На прошлых занятиях при решении СЛУ мы работали с матрицами. На данной лекции введем операции над матрицами и рассмотрим основные свойства, которыми обладают эти операции.

Напомним, что матрицей **размером**  $m$  на  $n$  называется таблица, разбитая на  $m$  строк и  $n$  столбцов. Будем использовать следующие обозначения матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) = (a_{ij})_{m \times n} = A_{m \times n}.$$

Элемент матрицы, стоящий в  $i$ -ой строке и  $j$ -ом столбце, обозначаем  $a_{ij}$ .

Две матрицы **равны**, если они имеют одинаковые размеры, и все соответствующие элементы этих матриц равны:

$$A = (a_{ij}) \text{ равна } B = (b_{ij}) \Leftrightarrow \text{равны их размеры и элементы } a_{ij} = b_{ij}.$$

Множество всех матриц фиксированного размера обозначим заглавной буквой  $M$  с указанием в нижнем регистре числа строк и столбцов:  $M_{m \times n}$ :

$$M_{m \times n} = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{R}\}.$$

Если число строк и столбцов одинаково и равно  $n$ , то матрицу называют квадратной  $n$ -го порядка. Обозначают  $M_{n \times n} = M_n$ .

Введем операцию **сложения** матриц. **Суммой** матриц одинакового размера называется матрица, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов исходных матриц:

$$\text{если } A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n}, \text{ то}$$

$$A + B = (c_{ij})_{m \times n}, \text{ где}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

Пример сложения матриц:

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+1 & 4+2 & 5+3 \\ 2+0 & -1+1 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 8 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $A, B, C$  – произвольные матрицы размера  $m$  на  $n$ . Операция сложения удовлетворяет следующим свойствам:

1. Сложение **коммутативно** (матрицы можно складывать в любом порядке):

$$A + B = B + A,$$

2. Сложение **ассоциативно** (порядок расстановки скобок не имеет значения):

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

3. Матрица, все элементы которой равны 0, называется **нулевой**.

Обозначим ее жирной цифрой ноль:  $\mathbf{0}_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ . Для

нулевой матрицы размера  $m$  на  $n$  выполняется равенство: сумма нулевой матрицы с  $A$  равно  $A$ :

$$A_{m \times n} + \mathbf{0}_{m \times n} = A_{m \times n}.$$

4. **Противоположной** матрицей к  $A = (a_{ij})$  называется матрица  $-A = (-a_{ij})$ , все элементы которой противоположны соответствующим элементам матрицы  $A$ . Сумма матрицы  $A$  и противоположной  $(-A)$  равно нулевой матрице:

$$A_{m \times n} + (-A_{m \times n}) = \mathbf{0}_{m \times n}.$$

Для любых матриц одинакового размера определена операция **вычитания**:  $A - B$  обозначает сумму матриц  $A + (-B)$ :

для  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}$ :

$$A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}.$$

Чтобы **умножить число на матрицу** (или матрицу на число) надо каждый элемент матрицы умножить на это число:

если  $r \in \mathbb{R}$ ,  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , то

$$rA = (c_{ij})_{m \times n}, \text{ где}$$

$$c_{ij} = r \cdot a_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

Приведем пример. Выполним операции над матрицами:

$$3 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) - (-3) & 3 \cdot 2 - 2 \\ 3 \cdot 0 - 1 & 3 \cdot 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Операция умножения матрицы на число обладает такими свойствами:

- 1)  $1A = A$ ;

$$2) (rs)A = r(sA);$$

$$3) (r + s)A = rA + sA$$

$$4) r(A + B) = rA + rB.$$

Свойства 3) и 4) позволяют раскрывать скобки при умножении матрицы на сумму чисел и при умножении числа на сумму матриц. Подобные правила раскрытия скобок называются **законами дистрибутивности**.

Рассмотренные свойства сложения матриц и умножения матрицы на число позволяют заключить, что множество  $M_{m \times n}$  всех матриц фиксированного размера образует векторное пространство.

Определим еще одну операцию. Матрицу называют **транспонированной** по отношению к матрице  $A$  (обозначают  $A^T$ ), если она получается из  $A$  заменой всех строк на соответствующие столбцы:

если  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , то

$$A^T = (c_{ij})_{n \times m}, \text{ где}$$

$$c_{ij} = a_{ji} \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m).$$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Укажем свойства этой операции:

1) выполнив последовательно две операции транспонирования, мы получим исходную матрицу:  $(A^T)^T = A$ ;

2) если транспонировать сумму матриц  $A+B$ , то получится матрица, равная сумме транспонированных матриц–слагаемых:  $(A + B)^T = A^T + B^T$ ;

3) при транспонировании матрицы  $rA$  получается матрица, равная произведению числа  $r$  и транспонированной матрицы  $A$ :  $(rA)^T = rA^T$ ;

4) ранг транспонированной матрицы равен рангу исходной матрицы; другими словами, базис системы векторов–строк состоит из такого же числа векторов, сколько их в базисе системы векторов–столбцов:

$$\text{Rank}(A) = \text{Rank}(A^T).$$

Теперь рассмотрим операцию **умножения** матриц. Умножать можно лишь матрицы определенных размеров: число столбцов первой матрицы

должно быть равно числу строк второй матрицы. В результате умножения матрицы  $A$  на  $B$  получится матрица  $C$ , каждый элемент  $c_{ij}$  которой вычисляется по определенному правилу:

если  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{n \times p}$ , то

$$AB = (c_{ij})_{m \times p}, \text{ где}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, p).$$

Кратко говорят, что для вычисления элемента  $c_{ij}$  надо  $i$ -ую строку матрицы  $A$  умножить на  $j$ -ый столбец матрицы  $B$ . Разберемся, что означает эта фраза.

Берем  $i$ -ую строку в матрице  $A$ , это последовательность элементов  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Берем  $j$ -ый столбец в матрице  $B$ , имеем последовательность  $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$ :

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

В силу условия, накладываемого на размеры матриц, количество чисел в строке и столбце одинаковое. Каждый элемент строки умножаем на соответствующий элемент столбца, затем складываем полученные произведения:

$$= \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

*j*-й столбец

*i*-я строка

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Рассмотрим пример. Умножим  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  размера  $2 \times 3$  на  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

размера  $3 \times 2$ . В результате получится матрица  $2 \times 2$ .

Вычислим элемент  $c_{11}$ . Для этого строку  $(1 \ 3 \ 1)$  умножаем на столбец  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ :  $1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 2$ .

Найдем  $c_{12}$ . Для этого первую строку  $(1 \ 3 \ 1)$  из  $A$  умножим на второй столбец  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  из  $B$ , получим:  $1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0$ .

Далее вычисляем:

$$c_{21} = (2 \ 0 \ 4) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 + 0 + 12 = 16,$$

$$c_{22} = (2 \ 0 \ 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 + 0 + 8 = 10.$$

Имеем матрицу  $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}$ .

Отметим свойства операции умножения матриц. Вначале скажем, какое свойство в общем случае не выполняется. Операция умножения матриц не коммутативна, то есть важно, в каком порядке мы умножаем матрицы:

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Может так случиться, что матрицу  $A$  на  $B$  умножить можно, а  $B$  на  $A$  – нельзя. Например,  $A_{1 \times 2} \cdot B_{2 \times 3}$  определено, а в обратном порядке умножение  $B_{2 \times 3}$  на  $A_{1 \times 2}$  произвести нельзя. Но даже в случае квадратных матриц, когда определены оба произведения, их результаты могут не совпадать.

Теперь перечислим равенства, которые выполняются всегда, когда матрицы имеют соответствующий размер.

1. Результат умножения не зависит от расстановки скобок (если не изменять порядок матриц), то есть умножение **ассоциативно**:  $(AB)C = A(BC)$ .
2. Справедливы два **дистрибутивных** закона, позволяющих раскрывать скобки:  $A(B + C) = AB + AC$  и  $(A + B)C = AC + BC$ .

3. Имеет место равенства  $r(AB) = (rA)B = A(rB)$ , показывающие, что число можно внести в сомножители (или вынести из произведения).

4. Для **единичной** матрицы  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$  соответствующего размера имеет место равенство  $A \cdot E = A = E \cdot A$ , где  $E, A \in M_n$ .

Рассмотренные выше операции соответствуют операциям над числами. Вспомним также, что числа также можно делить. Деление чисел сводится к умножению одного числа на число, обратное другому. Для некоторых матриц также можно найти обратную, но далеко не для всех.

Введем определение обратной матрицы. Пусть дана квадратная матрица  $A$ . Матрица называется **обратной** к  $A$ , если произведение этих матриц (в любом порядке) равно единичной матрице:  $A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$ .

Выполним операцию умножения для некоторых матриц и приведем пример взаимно обратных матриц.

Вначале убедимся на примере, что в произведении матрицы с единичной получится исходная матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 & 3 \cdot 1 + 0 & 1 \cdot 1 + 0 \\ 2 \cdot 1 + 0 & 0 \cdot 1 + 0 & 4 \cdot 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Перемножим две квадратные матрицы второго порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Их произведение даст единичную матрицу, причем в другом порядке результат будет таким же:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, имеем две взаимно обратные матрицы.

Умножив нулевую квадратную матрицу на любую другую того же порядка, получим нулевую матрицу:  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Единичная матрица никак получиться не может. Поэтому нулевая матрица не имеет обратной, так же как у нулевого числа нет обратного. Однако любое ненулевое число имеет обратное, что неверно для матриц. Например, если в данном примере оставить вторую строку нулевой, а первую взять



$$A \cdot X = B.$$

Допустим, что матрица  $A$  является квадратной, то есть в системе число уравнений равно числу переменных. Справедлива

**Теорема.** *СЛУ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ее основная матрица имеет обратную.*

Выразим решение СЛУ через обратную к  $A$  матрицу. Для этого умножим обе части равенства  $A \cdot X = B$  на  $A^{-1}$  слева и применим свойства умножения: поставим скобки в левой части так, чтобы сгруппировать взаимно обратные матрицы, в их произведении получится единичная матрица

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Слева остается неизвестная матрица  $X$ , а в правой части равенства записаны известные матрицы:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Итак, если основная матрица  $A$  системы уравнений имеет обратную, то столбец переменных  $X$  вычисляется по формуле:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B.$$

Опишем алгоритм нахождения обратной матрицы (если она существует) с помощью элементарных преобразований.

**Теорема.** *Пусть дана квадратная матрица  $A$ . Если к  $A$  справа приписать единичную матрицу и выполнить элементарные преобразования (для новой матрицы) так, чтобы  $A$  превратилась в единичную, то справа получится матрица, обратная к  $A$ .*

Конечно, если строки в  $A$  линейно зависимы, то элементарными преобразованиями не удастся привести  $A$  к единичной, но в этом случае  $A^{-1}$  не существует. Более подробно о критериях существования обратной матрицы мы поговорим на следующей лекции.

Рассмотрим пример применения алгоритма поиска обратной матрицы. Возьмем матрицу второго порядка  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ .

Припишем к  $A$  справа единичную матрицу и выполним элементарные преобразования:



$$\left( \begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Вначале приводим  $A$  к ступенчатому виду, обеспечивая нуль в первом столбце (снизу). Затем добиваемся нуля во втором столбце (сверху). После этого легко получить единичную матрицу:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) - 2I \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{array} \right) : 5 \sim \\ & \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -0,4 & 0,2 \end{array} \right) + II \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0,6 & 0,2 \\ 0 & 1 & -0,4 & 0,2 \end{array} \right) : 2 \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 1 & -0,4 & 0,2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Итак, обратная матрица найдена:  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ -0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$ .

Самостоятельно сделайте проверку, перемножив  $A$  и  $A^{-1}$ , и убедившись, что в результате получится единичная матрица.