Лекция 6.

Исследование систем линейных уравнений

На данной лекции продолжим исследования, посвященные системам линейных уравнений. Используя введенные ранее понятия, сформулируем критерий, показывающий, когда система совместна, и исследуем множество решений однородной системы.

Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Как нам известно, из коэффициентов ее уравнений можно составить матрицу, называемую расширенной матрицей системы:

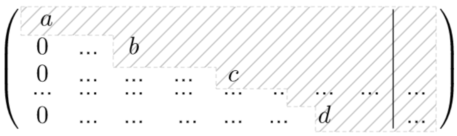
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

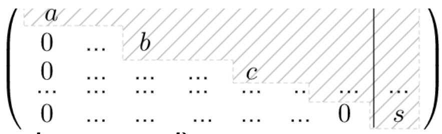
В расширенной матрице в последнем столбце записаны свободные члены уравнений. Матрица без учета этого столбца называется основной матрицей системы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

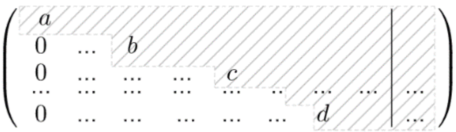
Допустим, что мы привели расширенную матрицу к ступенчатому виду. В ней нет нулевых строк, а ведущий элемент каждой последующей строки располагается правее предыдущего. Возможны два случая:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$\sim$ 

$\sim$ 

Первый случай (ведущие элементы a, b, c, …, d):

$\sim$ .

В последней строке ведущий элемент (то есть первое ненулевое число) располагается в основной матрице. В этом случае и основная матрица, и расширенная, имеют ступенчатый вид с одним и тем же числом строк, то есть ранги их равны. Система уравнений, соответствующая расширенной матрице, совместна, то есть имеет решения (одно или бесконечно много). Действительно, противоречивого уравнения мы не получим.

Второй случай:

$$\sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} a & & & & & & & \\ 0 & \ldots & b & & & & & \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & c & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & s \end{array}\right).$$

Ведущий элемент последней ненулевой строки – это свободный член. Такая строка соответствует противоречивому уравнению. Система уравнений несовместна. При этом в основной матрице последняя строка нулевая, вычеркивая эту строку, основная матрица будут ступенчатой. Ненулевых строк в основной матрице меньше, чем в расширенной матрице. Значит, ранги этих матриц разные.

Получаем **теорему**, именуемую **критерием Кронекера–Капелли**. *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы этой системы равен рангу ее расширенной матрицы*.

Леопольд Кронекер и Альфредо Капелли – немецкий и итальянский математики 19 века.

Рассмотрим пример системы двух уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}.$$

Составим основную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A равен 1, так как строки пропорциональны:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для расширенной матрицы:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ранг равен 2 – числу строк в ступенчатой системе, получаемой вычитанием из второй строки трех первых строк:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ранги различны ($\operatorname{Rank} A \neq \operatorname{Rank} \bar{A}$), следовательно, исходная система уравнений несовместна.

Снова возьмем произвольную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Если среди свободных членов есть хотя бы одно ненулевое число, то систему называют неоднородной. По любой такой системе можно составить систему уравнений, у которой все свободные коэффициенты равны 0:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Полученную систему называют однородной системой линейных уравнений.

Любая однородная система уравнений совместна, так как нулевой вектор (то есть n нулей) является ее решением. Значит, однородная система имеет либо только одно нулевое решение, либо бесконечно много решений, включая нулевое. В силу предыдущей теоремы ранги двух ее матриц равны. Это число называют просто рангом однородной системы линейных уравнений.

Рассмотрим интересное утверждение, связывающее множество решений совместной системы уравнений и множество решений соответствующей однородной системы уравнений.

Возьмем произвольную совместную систему, множество ее решений обозначим буквой M:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \leftrightarrow M.$$

Буквой c обозначим произвольное конкретное решение данной системы:

$$c \in M.$$

Далее рассмотрим однородную систему с множеством решений V:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \leftrightarrow V.$$

Теорема. *Множество всех решений любой системы уравнений равно сумме множества всех решений соответствующей однородной системы и любого фиксированного решения исходной системы*:

$$M = V + c = \{a + c \,|\, a \in V\}.$$

Проиллюстрируем сформулированное свойство на примере следующей системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ \qquad\; x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}.$$

Эта система была решена на одной из предыдущих лекций. Общее решение имеет вид:

$$M = \{(k,\ 1-2k,\ k)\}\ ,\ k \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что тройка чисел $c = (0,1,0)$ является одним из решений этой системы (в этом легко убедиться подстановкой указанных значений вместо переменных):

$$c \in M.$$

Представим M как сумму этого частного решения и вектора, пропорционального (1,–2,1):

$$M = \{(k,\ -2k,\ k) + (0,\ 1,\ 0)\} =$$
$$= \{k\big(1,\ -2,\ 1\big) + \big(0,\ 1,\ 0\big)\}.$$

Самостоятельно убедитесь, что полученное таким образом множество $\big\{k\big(1,\ -2,\ 1\big)\big\} = V$ есть множество решений соответствующей однородной системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \qquad\ \ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Получаем, что M – это сумма V и вектора c:

$$M = V + c.$$

Сделаем геометрическую иллюстрацию. Зафиксируем систему координат в геометрическом пространстве (рис. 1).

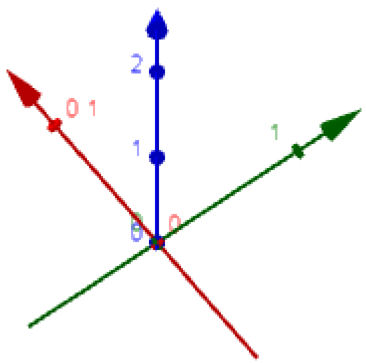


Рис. 1

Вспомним, что линейное уравнение с тремя переменными задает в трехмерном пространстве плоскость. Если уравнение однородное, то есть свободный коэффициент равен 0, то эта плоскость проходит через начало координат. Поэтому множеством решений однородной системы, содержащей два уравнения, будет линия пересечения двух плоскостей, проходящая через начало координат (рис. 2).

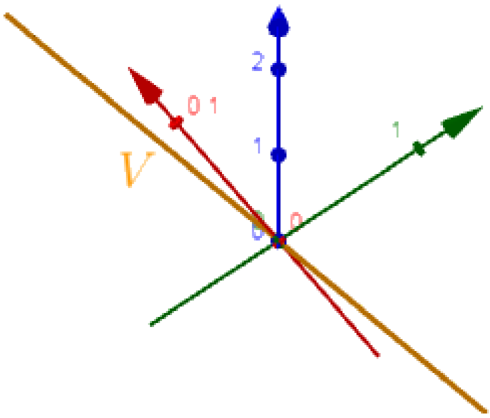


Рис. 2

Эта прямая соответствует множеству *V*. Тогда решение исходной неоднородной системы будет представлять собой прямую *M*, все точки которой получаются переносом точек прямой *V* на вектор *c* (рис. 3).

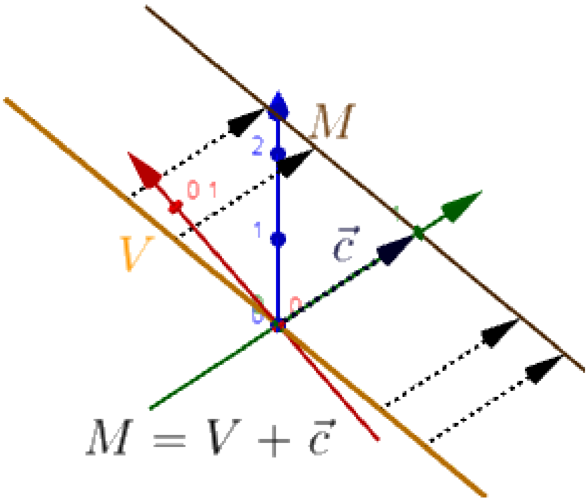


Рис. 3

Исследуем решения следующего однородного линейного уравнения:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.$$

Обозначим множество решений уравнения буквой *V*. Свойства множества *V*, которые мы сейчас выявим, относятся не только к этому уравнению, а имеют общий характер.

Уже было упомянуто, что нулевая строка всегда является решением однородного уравнения:

$$(0,\ 0,\ 0) \in V.$$

Возьмем какое-нибудь ненулевое решение, например, (2,–1,0). Противоположный вектор (–2,1,0) также является решением:

$$(2,-1,0) \in V \ \Rightarrow\ -(2,-1,0) = (-2,1,0) \in V.$$

Выберем еще какое-нибудь решение, например, (–1,–1,1). Умножим эту строку на любое число, например, на 3. Снова получим решение исходного уравнения:

$$(-1,-1,1) \in V \ \Rightarrow\ 3(-1,-1,1) = (-3,-3,3) \in V.$$

Наконец, возьмем любые два решения и сложим их, полученная тройка снова будет решением. Например, сложим векторы $(-2,1,0)$, $(-1,-1,1)$, получим (-3,-0,1) – новое решение этого уравнения:

$$(-2,1,0),\ (-1,-1,1) \in V \ \Rightarrow\ (-2,1,0) + (-1,-1,1) = (\text{-3,-0,1}) \in V.$$

Оказывается, что все решения можно получить указанными операциями сложения и умножения вектора на число.

Точно также множество решений V любого однородного линейного уравнения обладает следующими свойствами:

1) нулевой вектор лежит в V:

$$\mathbf{0} \in V.$$

2) умножив решение на любой скаляр, также получим решение этого уравнения:

$$c \in V \ \Rightarrow\ rc \in V \quad (-c \in V).$$

В частности, умножив решение на (–1), мы получим противоположный вектор, являющийся решением данного уравнения.

3) сумма любых двух решения снова является решением:

$$c_1,\ c_2 \in V \ \Rightarrow\ c_1 + c_2 \in V.$$

Имеет место следующая

Теорема. *Множество решений однородной системы уравнений является векторным пространством*.

Итак, любая однородная СЛУ порождает векторное пространство ее решений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \leftrightarrow \text{векторное пространство } V.$$

Введем понятие фундаментальной системы решений, учитывая, что множество решений однородной системы образует векторное пространство.

Нам потребуется вспомнить, что такое базис пространства. Базисом векторного пространства V называется его линейно независимая часть, через которую линейно выражается каждый вектор из V.

Базис пространства решений однородной системы линейных уравнений называется фундаментальной системой решений, сокращенно ФСР.

Вспомним также, что число векторов в базисе называется размерностью пространства, это число не зависит от выбранного базиса.

Выполняется следующая

Теорема. *Пусть система однородных уравнений содержит n переменных. Если ранг r этой системы меньше n, то она имеет фундаментальную систему решений, состоящую из $n - r$ векторов. То есть* *размерность пространства решений такой системы равна* $n - r$. *Если же параметры* n *и* r *равны, то единственным решением такой системы является нулевой вектор, в этом случае, базис выделить нельзя.*