Векторные пространства

n-мерные строки (или n-мерные векторы, или, просто, векторы) – элементы множества $\mathbb{R}^n$.

Скаляры – числа из $\mathbb{R}$.

Вектор в геометрии – это объект, определяемый направлением и длиной.

Векторная плоскость **E₂** – множество всех векторов, параллельных одной плоскости (эти векторы будут лежать в одной плоскости, если откладывать их от точек этой плоскости).

Геометрическое векторное пространство **E₃** – множество всех геометрических векторов.

Координаты n-ки $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ из $\mathbb{R}^n$ – ее элементы $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Цветовое пространство C_3 – множество всех цветов, если цет понимать как класс всех световых излучений, одинаково воспринимаемых человеком.

Сложение произвольных n-ок $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ и $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ – операция на $\mathbb{R}^n$, выполняемая покоординатно:

$$(r_1, r_2, \ldots, r_n) + (s_1, s_2, \ldots, s_n) = (r_1 + s_1, r_2 + s_2, \ldots, r_n + s_n)$$

Умножение n-ки $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ на число $k \in \mathbb{R}$ –"внешняя" для $\mathbb{R}^n$ операция, выполняемая покоординатно:
$k(r_1, r_2, \ldots, r_n) = (kr_1, kr_2, \ldots, kr_n)$.

Векторное пространство – непустое множество, на котором заданы две операции сложение и умножение на число, удовлетворяющие условиям:
1) Перемена мест слагаемых не изменяет сумму. Говорят, что операция сложения коммутативна:
$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ для любых $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.
2) Сумму из трех слагаемых можно вычислять по-разному, в зависимости от расстановки скобок. При этом результат суммы не изменится. Говорят, что сложение ассоциативно:
$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$ для любых $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.
3) Существует нулевой вектор $\mathbf{0}$ (обозначаемый жирной цифрой ноль). Нулевой вектор представляет собой строку, составленную из одних нулей. Сумма нулевого вектора с любым вектором $\boldsymbol{a}$ не изменяет $\boldsymbol{a}$:
$\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ для любого $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.
4) Для любого вектора $\boldsymbol{a}$ есть противоположный к нему вектор, обозначаемый $-\boldsymbol{a}$. Противоположные векторы в сумме дают нулевой вектор:
$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ для любого $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.
5) При умножении вектора на число 1 вектор не изменяется:
$\mathbf{1}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ для любого $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.
6) $(\boldsymbol{r_1 r_2})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r_1}(\boldsymbol{r_2 a})$ для любых скаляров $\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2} \in \mathbb{R}$ и вектора $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.
7) $(\boldsymbol{r_1} + \boldsymbol{r_2})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r_1 a} + \boldsymbol{r_2 a}$ для любых скаляров $\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2} \in \mathbb{R}$ и вектора $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.
8) $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{ra} + \boldsymbol{rb}$ для любого скаляра $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}$ и векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Арифметическое n-мерное векторное пространство – множество $\mathbb{R}^n = \{(r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n) \mid r_i \in \mathbb{R}\}$ с заданными на нем операциями сложение n-ок и умножения n-ки на число.