**Лекция 4.**

***Векторные пространства***

Лекция посвящена рассмотрению примеров множеств, имеющих однотипную структуру, одинаковые свойства введенных на них операций. Эти свойства позволят нам ввести важное математическое понятие векторного пространства.

Далее будем работать с множеством $n$-ок чисел. С такими наборами мы уже встречались, решая системы линейных уравнений.

Возьмем произвольное натуральное число $n$ и зафиксируем его.

Рассмотрим нулевое уравнение:

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$$
$$0 = 0.$$

Решением этого уравнения является любая упорядоченная $n$-ка действительных чисел. Множество всех таких $n$-ок обозначают как $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = \{(r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n) \mid r_i \in \mathbb{R}\}.$$

Элементы множества $\mathbb{R}^n$ называются $n$-мерными строками, $n$-мерными векторами или просто векторами. Термин «вектор» для данного множества закрепился из-за сходства свойств этих объектов с обычными геометрическими векторами.

Элементы строк, то есть числа из $\mathbb{R}$, называют скалярами.

Рассмотрим некоторые модели, в которых приходится работать с $n$-ками чисел.

Как мы знаем, каждому уравнению соответствует множество $n$-ок его решений:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$
$$\updownarrow$$
$$M = \{a = (r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n) \mid a - \text{решение}\}.$$

С другой стороны, уравнению от $n$ переменных сопоставляется $n$-мерная строка его коэффициентов, то есть строка матрицы:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$
$$\updownarrow$$
$$(a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n \quad b).$$

Укажем геометрические примеры работы с $n$-ками чисел.

Точка на плоскости в фиксированной системе координат однозначно определяется упорядоченной парой чисел, называемых координатами этой точки (рис. 1).

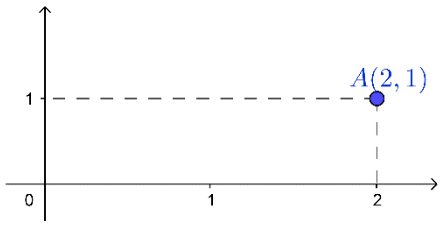


Рис. 1

Точка в пространстве задается упорядоченной тройкой чисел (рис. 2).

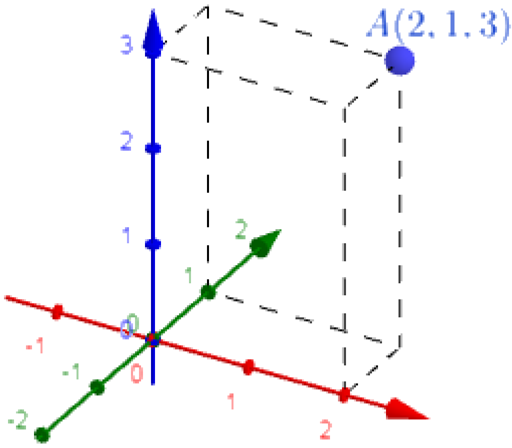


Рис. 2

Перейдем к геометрическим векторам. Это понятие используется как в математике, так и в физике. Вектор в геометрии – это объект, определяемый направлением и длиной. Изображается геометрический вектор отрезком с указанием направления. Известно, что от любой точки можно отложить направленный отрезок, равный заданному вектору.

Обозначим через $\mathbf{E}_2$ множество всех векторов, параллельных одной плоскости (эти векторы будут лежать в одной плоскости, если откладывать их от точек этой плоскости). $\mathbf{E}_2$ будем называть векторной плоскостью. В пространстве $\mathbf{E}_2$ каждый вектор характеризуется своими координатами. Если отложить вектор от начала координат, то координаты вектора – это координаты его конечной точки (рис. 3).

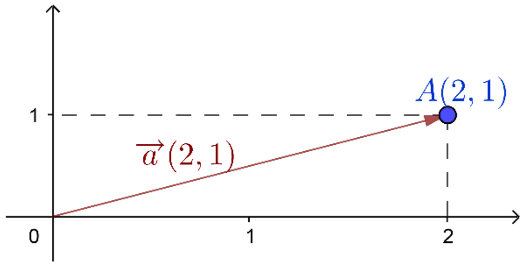


Рис. 3

Через $\mathbf{E}_3$ обозначим множество всех векторов геометрического пространства. По аналогии с плоскостью, вектору сопоставляется тройка его координат (рис. 4).

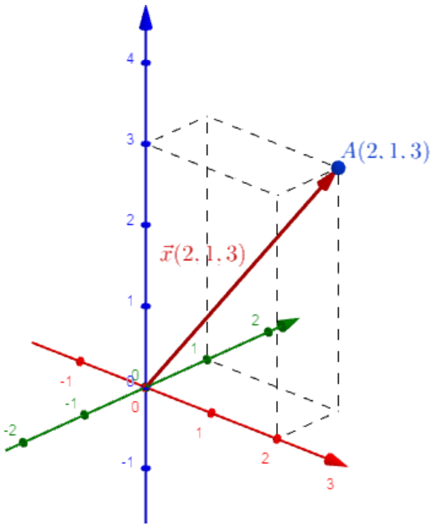



Рис. 4

В общем случае, элементы произвольной упорядоченной $n$-ки $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ из $\mathbb{R}^n$ также называют ее координатами.

Рассмотрим пример из физики. Начнем с терминов. Свет – это электромагнитное излучение, испускаемое, например, нагретым телом или веществом. В зависимости от длины волны испускаемого излучения электромагнитные волны по-разному воспринимаются нашим глазом. Такое восприятие зависит также от интенсивности светового потока. Бывает, что разные световые потоки воспринимаются глазом одинаково. Класс всех световых излучений, которые одинаково воспринимаются человеком, называется цветом.

Рассмотрим множество всех цветов. Обозначим его через $C_3$. Рассмотрим цветовую модель RGB, которая встречается во многих приложениях (рис. 5).

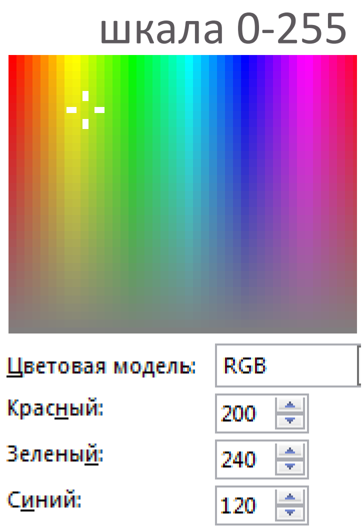



Рис. 5

Модель RGB основана на том, что любой цвет – это комбинация трех базовых цветов: красного (R), зеленого (G) и синего (B). Данная модель сопоставляет цвету тройку интенсивностей базовых цветов.

Приведем пример. Для шкалы интенсивности от 0 до 255 следующий светло-зеленый цвет складывается из красного цвета с интенсивностью 200, зеленого 240 и синего 120 (рис. 6).

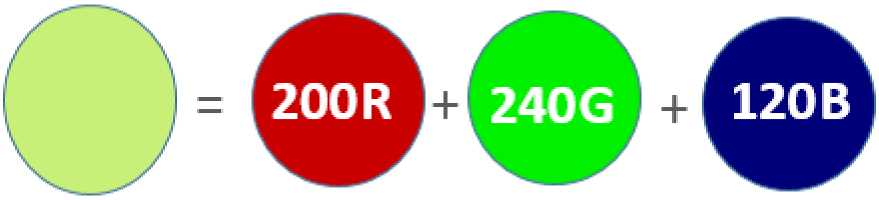



Рис. 6.

Указанный светло-зеленый цвет может быть однозначно задан тройкой чисел (200, 240, 120).

Мы привели ряд интерпретаций множества

$$\mathbb{R}^n = \{(r_1, r_2, \ldots, r_n) \mid r_i \in \mathbb{R}\}.$$

Вспомним, что строки матрицы (то есть элементы из $\mathbb{R}^n$) можно складывать, вычитать, и умножать на число. При этом указанные действия над строками сводятся к аналогичным операциям над соответствующими координатами.

Определим операции на $\mathbb{R}^n$.

Сложение произвольных $n$-ок $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ и $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ из $\mathbb{R}^n$ выполняется покоординатно:

$$(r_1, r_2, \ldots, r_n) + (s_1, s_2, \ldots, s_n) =$$
$$= (r_1 + s_1, r_2 + s_2, \ldots, r_n + s_n)$$

Чтобы умножить $n$-ку $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ на число $k \in \mathbb{R}$, следует каждую координату умножить на $k$:

$$k(r_1, r_2, \ldots, r_n) = (kr_1, kr_2, \ldots, kr_n)$$

Операцию вычитания $n$-ок можно не определять, поскольку она соответствует прибавлению к одной $n$-ке другой, умноженной на $(-1)$.

Покажем, что введенные таким образом операции на множестве $n$-ок соответствуют тем же операциям над соответствующими элементами приведенных выше множеств.

Легко видеть, что рассмотренные ранее преобразования линейных уравнений сводятся к преобразованиям над $n$-ками их коэффициентов.

1) сложение:

$$\left.\begin{array}{c} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \\ + \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + \cdots + a'_nx_n = b' \end{array}\right\} (a_1 + a'_1)x_1 + (a_2 + a'_2)x_2 + \cdots + (a_n + a'_n)x_n = b$$

$$\updownarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} (a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n \quad b) \\ + \\ \phantom{x} \end{array}\right\} (a_1 + a'_1 \quad a_2 + a'_2 \quad \ldots \quad a_n + a'_n \quad b + b')$$

$(a'_1 \quad a'_2 \quad \dots \quad a'_n \quad b')$

2) умножение на число:

$r \cdot (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b) \leftrightarrow r \cdot (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n \quad b)$

Вспомним теперь как складываются и умножаются на число геометрические векторы, то есть векторы из множеств $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}_3$.

Рассмотрим векторную плоскость $\mathbf{E}_2$. Зафиксируем на плоскости какую-нибудь систему координат.

Мы знаем, что вектор на плоскости можно отождествить с упорядоченной парой его координат (рис. 7).

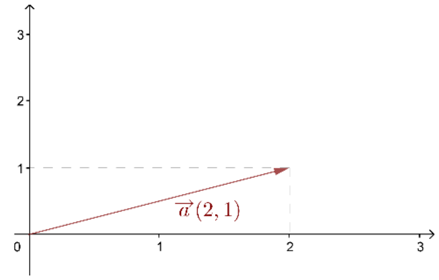



Рис. 7

Для сложения векторов можно использовать правило треугольника или правило параллелограмма (рис. 8).

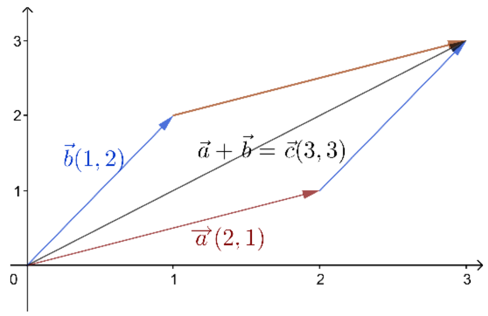



Рис. 8

Складывая векторы в $\mathbf{E}_2$, мы складываем их координаты. То же свойство выполняется в геометрическом векторном пространстве $\mathbf{E}_3$.

Умножая геометрический вектор на число $k$, мы изменяем его длину в $k$ раз и в случае, если $k < 0$, меняем его направление на противоположное (рис. 9).

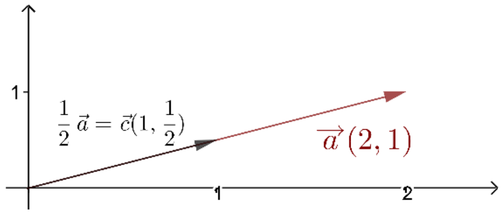


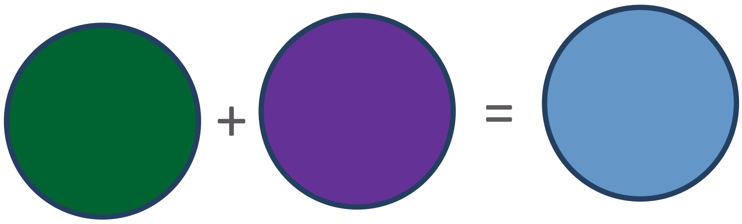

Рис. 9.

При умножении геометрического вектора на число (и в $\mathbf{E}_2$, и в $\mathbf{E}_3$), его координаты умножаются на это число.

Рассмотрим операции на множестве $\mathbf{C}_3$. Для того чтобы сложить цвета, надо смешать излучения. Для умножения цвета на число надо изменить интенсивность его излучения.

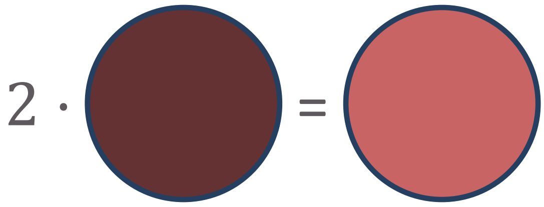
Операции над цветами соответствуют операциям над их кодами.

Например, взяв темно-зеленый цвет с кодом (0, 100, 50) и фиолетовый (100, 50, 150), получим цвет с кодом (100, 150, 200), близкий к голубому (рис. 10).



$(0, 100, 50)$ $+$(100, 50, 150) $=$(100, 150, 200) Рис. 10

Умножив цвет с кодом (100, 50, 50) на 2, мы получим цвет с кодом (200, 100, 100), то есть интенсивность каждого базового цвета увеличивается в два раза (рис. 11).



$2 \cdot (100, 50, 50) = (200, 100, 100)$ Рис. 11

Введенные операции на множестве *n*-ок чисел обладают следующими свойствами:

1) Перемена мест слагаемых не изменяет сумму. Говорят, что операция сложения коммутативна:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \text{ для любых } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}.$$

2) Сумму из трех слагаемых можно вычислять по-разному, в зависимости от расстановки скобок. При этом результат суммы не изменится. Говорят, что сложение ассоциативно:

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} \text{ для любых } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}.$$

3) Существует нулевой вектор $\mathbf{0}$ (обозначаем его жирной цифрой ноль). Нулевой вектор представляет собой строку, составленную из одних нулей. Сумма нулевого вектора с любым вектором $\boldsymbol{a}$ не изменяет $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \text{ для любого } \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}.$$

4) Для любого вектора $\boldsymbol{a}$ есть противоположный к нему вектор, обозначаемый $-\boldsymbol{a}$. Противоположные векторы в сумме дают нулевой вектор:

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = \mathbf{0} \text{ для любого } \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}.$$

5) При умножении вектора на число 1 вектор не изменяется:

$$\mathbf{1}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \text{ для любого } \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}.$$

6) $(\boldsymbol{r_1 r_2})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r_1}(\boldsymbol{r_2 a})$ для любых скаляров $\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2} \in \mathbb{R}$ и вектора $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

7) $(\boldsymbol{r_1} + \boldsymbol{r_2})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r_1}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{r_2}\boldsymbol{a}$ для любых скаляров $\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2} \in \mathbb{R}$ и вектора $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

8) $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{ra} + \boldsymbol{rb}$ для любого скаляра $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}$ и векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Сформулированные свойства верны, в частности, для геометрических векторов. В качестве нулевого вектора берется вектор, у которого начало и конец совпадают, то есть точка. О подобных множествах говорят, что они образуют векторное пространство.

Дадим определение. Непустое множество, на котором заданы две операции: сложение и умножение на число, удовлетворяющие условиям 1) – 8), называется векторным пространством.

Множество $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ всех векторов-строк называется арифметическим *n*-мерным пространством.

Векторными пространствами являются рассмотренные выше множества геометрических векторов $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$. Множества цветов $\mathbf{C}_3$ также можно обратить в векторное пространство, но для этого следует добавить к реальным цветам несуществующие (абстрактные) и неразличимые нами цвета.