Системы линейных уравнений. Метод гаусса. Часть 1

Ступенчатая система линейных уравнений – это система, удовлетворяющая условиям:
1) она не содержит нулевых уравнений,
2) для первых ненулевых коэффициентов ее уравнений

$$a_{1k},\ a_{2r},\ \dots,\ a_{mt}$$

номера неизвестных при них возрастают:

$$k < r < \ \dots\ < t.$$

Ведущие элементы матрицы – первые ненулевые элементы ее строк.

Ступенчатая матрица – это матрица, соответствующая ступенчатой системе. Иными словами, это матрица, в которой:
1) нет нулевых строк,
2) номера столбцов ее ведущих элементов

$$a_{1k},\ a_{2r},\ \dots,\ a_{mt}$$

возрастают:

$a_{1k},\ a_{2r},\ \dots,\ a_{mt}.$

Примеры ступенчатых матриц:

1. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ (для ступенчатой матрицы мы можем нарисовать «ступеньки»).

2. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ («длина ступенек» может быть разной).

Пример матрицы, не являющейся ступенчатой:

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ – не ступенчатая.

Метод Гаусса – метод решения любых систем линейных уравнений, основанный на идее сведения с помощью элементарных преобразований СЛУ (ее матрицы) к равносильной ступенчатой, а затем последовательного выражения неизвестных.

Нулевая система уравнений – система, у которой все коэффициенты равны 0. Она равносильна нулевому уравнению.

Нулевая матрица – матрица, у которой все элементы равны 0.

Теорема. *Любую ненулевую СЛУ (ненулевую матрицу) с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.*

Теорема. *Для любой ступенчатой системы линейных уравнений возможен точности один из случаев:*

1. Система имеет противоречивое уравнение и значит не имеет решений, то есть является несовместной.

2. В системе нет противоречивого уравнения. Тогда

– либо число уравнений системы равно числу неизвестных, и такая система имеет ровно одно решение,
– либо число уравнений меньше числа неизвестных, и система имеет бесконечно много решений.

Примеры геометрических интерпретаций СЛУ с двумя переменными:
Каждое уравнение данной системы соответствует некоторой прямой на плоскости Oxy:

$ax + by = c \xleftrightarrow{a\neq 0 \text{ или } b\neq 0}$ прямая на Oxy.
$(b \neq 0 \Longrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} = kx + l\,,$
$b = 0,\ a \neq 0 \Longrightarrow x = \frac{c}{a} = l)$

1) Система

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

соответствует двум пересекающимся прямым, а ее единственное решение – координатам точки A пересечения прямых (рис. 1).

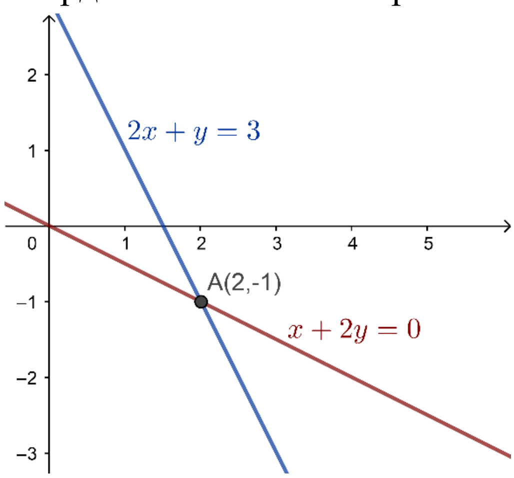

Рис. 1

2) Система
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 30 \end{cases}$$
геометрически представляется двумя параллельными прямыми. Эти прямые не имеют общих точек, значит и решений у системы нет (рис. 3).

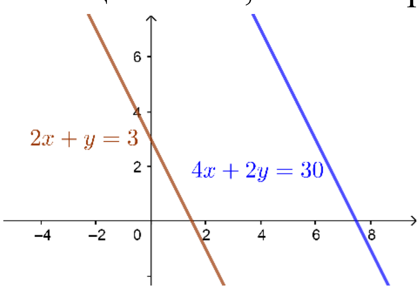

Рис. 3

Примеры геометрических интерпретаций СЛУ с тремя переменными:
Каждое уравнение данной системы соответствуют плоскости в пространстве $Oxyz$:

$ax + by + cz = d \xleftrightarrow{a\neq 0 \text{ или } b\neq 0 \text{ или } c\neq 0}$ плоскость на $Oxyz$.

1) Единственное решение системы

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

соответствует координатам точки пересечения трех плоскостей (рис. 2).

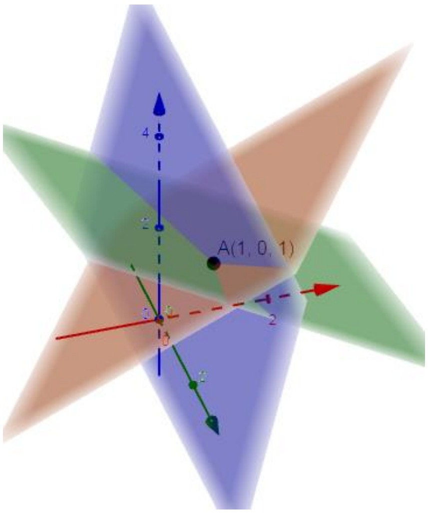

Рис. 2

2) Системе

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 4x + 2y + 2z = 30 \end{cases}$$

сопоставляются две параллельные плоскости, решений система не имеет (рис. 4).

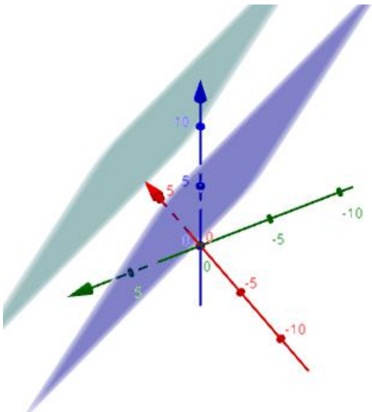

Рис. 4

Пример решения совместной СЛУ (с единственным решением) методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}.$$

Приведем систему к ступенчатому виду. Перейдя к матрице:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Начнем с первого столбца. Нужно получить под ведущим элементом первой строки ноль. Чтобы не получить дроби, мы переставим строки матрицы местами и вычтем из второй строки две первых:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ -2I \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу. Она соответствует системе:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ \quad -3y = 3 \end{cases}.$$

Система имеет одно решение:

$y = -1 \Rightarrow x = 2;$

$M = \{(2, -1)\}.$

Пример решения несовместной СЛУ методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

В матрице данной системы ведущий элемент первой строки 1. Обнулим все элементы первого столбца под ведущим:

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ -I \\ -I \\ -3I \end{matrix}\end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее обнулим элементы второго столбца под ведущим элементом. Уравновесим коэффициенты 2-й и 4-й строк, умножив вторую строчку на 4, а четвертую строчку над 3. Затем вычтем из одной другую:

$$\sim \begin{array}{cc}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \cdot 4 \\ \\ \cdot 3 \end{matrix}\end{array} \sim \begin{array}{cc}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 12 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ -II \end{matrix}\end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Обнулим последний элемент третьего столбца. Попутно можно уменьшить элементы второй строки, помножив ее на ¼ (то есть поделив на 4):

$$\sim \begin{array}{cc}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ :4 \\ \\ -2III \end{matrix}\end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Последняя строка полученной матрицы соответствует противоречивому уравнению

$0 = -3.$

Значит, вся система решений не имеет, множество решений пусто:

$M = \emptyset.$