Метод Гаусса

Задача 1. Решите систему линейных уравнений $\begin{cases}3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1\\2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4\\x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 7\end{cases}.$

Решение.

Приведем данную систему к ступенчатому виду.

Запишем матрицу системы:

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & -2 & 1 & 1\\2 & 1 & -2 & 1 & 4\\1 & 3 & -2 & 1 & 7\end{pmatrix}.$$

Ведущий элемент первой стирки 3. Для упрощения расчетов поменяем местами первую и третью строки, чтобы получить ведущим элементом 1:

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & -2 & 1 & 1\\2 & 1 & -2 & 1 & 4\\1 & 3 & -2 & 1 & 7\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 1 & 7\\2 & 1 & -2 & 1 & 4\\3 & -1 & -2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Обнулим элементы первого столбца, расположенные ниже ведущего:

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 1 & 7\\2 & 1 & -2 & 1 & 4\\3 & -1 & -2 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{matrix}\\-2I\\-3I\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 1 & 7\\0 & -5 & 2 & -1 & -10\\0 & -10 & 4 & -2 & -20\end{pmatrix}.$$

В полученной матрице последние две строки пропорциональны. Значит, после преобразований из двух останется одна:

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 1 & 7\\0 & -5 & 2 & -1 & -10\\0 & -10 & 4 & -2 & -20\end{pmatrix} \begin{matrix}\\\\-2II\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 1 & 7\\0 & -5 & 2 & -1 & -10\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 1 & 7\\0 & -5 & 2 & -1 & -10\end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу, в которая соответствует СЛУ без противоречивого уравнения из 2-х уравнений от 4-х неизвестных. Уравнений меньше неизвестных. Значит, решений будет бесконечно много. Свободных неизвестных будет две (=4-2).

Запишем соответствующую ступенчатую систему:

$$\begin{cases}x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 7\\-5x_2 + 2x_3 - x_4 = -10\end{cases}.$$

Те неизвестные, которые стоят в каждом уравнении первыми (при ненулевых коэффициентах) назначим главными неизвестными. Оставшиеся неизвестные будут свободными.

Итак, главными будут x_1 и x_2, а свободными – неизвестные x_3 и x_4. Переменные x_3 и x_4. будет принимать произвольные числовые значения, а главные неизвестные x_1 и x_2 должны быть через их выражены.

Выражаем главное неизвестное через свободные:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 7 \\ -5x_2 + 2x_3 - x_4 = -10 \end{cases} \sim \begin{cases} -5x_2 = -2x_3 + x_4 - 10 \\ x_1 = -3x_2 + 2x_3 - x_4 + 7 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x_2 = \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 + 2 \\ x_1 = -3(\frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 + 2) + 2x_3 - x_4 + 7 \end{cases} \sim \begin{cases} x_2 = \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 + 2 \\ x_1 = \frac{4}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 + 1 \end{cases}.$$

Получили

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{5}x_3 - \dfrac{2}{5}x_4 + 1 \\ x_2 = \dfrac{2}{5}x_3 - \dfrac{1}{5}x_4 + 2 \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

либо так:

$$\begin{cases} x_3 = c \\ x_4 = d \\ x_1 = \frac{4}{5}c - \frac{2}{5}d + 1, \\ x_2 = \frac{2}{5}c - \frac{1}{5}d + 2 \end{cases} \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Запишем множество решений системы:

$$M = \{\left(\frac{4}{5}c - \frac{2}{5}d + 1; \quad \frac{2}{5}c - \frac{1}{5}d + 2; \quad c; \quad d\right) \mid c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Ответ. $M = \{\left(\frac{4}{5}c - \frac{2}{5}d + 1; \quad \frac{2}{5}c - \frac{1}{5}d + 2; \quad c; \quad d\right) \mid c, d \in \mathbb{R}\}$.

Задача 2. Исследуйте систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ kx_1 + x_2 + (2-k)x_3 = 1 \end{cases}$ в зависимости от параметра k. Во всех случаях, когда система совместна, запишите множество ее решений.

Решение.

Приведем данную систему к ступенчатому виду.

Запишем матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 2-k & 1 \end{pmatrix}.$$

Ведущий элемент первой стирки 1. Обнулим элементы первого столбца, расположенные ниже ведущего:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 2-k & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -I \\ -kI \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 2-k-k^2 & 1-k \end{pmatrix}.$$

Обнулим элемент второго столбца под элементом $k-1$ (при $k \neq 1$ он будет ведущим):

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 2-k-k^2 & 1-k \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 3-2k-k^2 & 1-k \end{pmatrix}.$$

Для удобства вычислений разложим элемент матрицы $3-2k-k^2$ на множители:

$$3-2k-k^2 = -(k-1)(k+3).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $k_1 = 1$ и $k_1 = -3$ являются корнями многочлена $3-2k-k^2$.

Запишем матрицу:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & -(k-1)(k+3) & 1-k \end{pmatrix}.$$

Вид полученной матрицы зависит от значения параметра k.

Рассмотрим все возможные случаи:

1. $k-1=0 \Leftrightarrow k=1$.

Матрица примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая система имеет вид:

$$\{x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Уравнений меньше неизвестных. Значит, решений будет бесконечно много. Свободных неизвестных будет две (=3-1).

Главной неизвестной будут x_1, а свободными – неизвестные x_2 и x_3. Выражаем главное неизвестное через свободные:

$$\{x_1 = -x_2 - x_3 + 1$$

либо

$$\begin{cases} x_2 = c \\ x_3 = d \\ x_1 = -c - d + 1 \end{cases}, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Запишем множество решений системы:

$$M = \{(-c - d + 1; \;\; c; \;\; d) \mid c, d \in \mathbb{R}\}.$$

2. $k - 1 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 1$

В этом случае можем преобразовать рассматриваемую матрицу:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & -(k-1)(k+3) & 1-k \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot \frac{1}{k-1} \\ \cdot \frac{-1}{k-1} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k+3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вид полученной матрица зависит от значения параметра k. Возможны два случая:

– $k + 3 = 0 \;\; \Leftrightarrow k = -3$. Подставим:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

последняя строка матрицы соответствует противоречивому уравнению:

$$0 = 1.$$

Значит, в случае $k = -3$ решений у соответствующей системы не будет.

– $k + 3 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq -3$. Получаем ступенчатую матрицу, которая соответствует СЛУ с одним решением (число уравнений равно числу неизвестных):

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k+3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение. Запишем соответствующую СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \\ \quad x_2 - x_3 = 0 \\ \quad (k+3)x_3 = 1 \end{cases}.$$

Получаем

$$x_3 = \frac{1}{k+3},$$

$$x_2 = x_3 = \frac{1}{k+3},$$

$$x_1 = -x_2 - kx_3 + 1 = -\frac{1}{k+3} - \frac{k}{k+3} + 1 = \frac{2}{k+3}.$$

Итак, в случае, когда $k \neq 1$ и $k \neq -3$ данная в условии задачи система имеет единственное решение $\left(\frac{2}{k+3};\ \ \frac{1}{k+3};\ \ \frac{1}{k+3}\right)$.

Подытожим:

При $k = 1$ система имеет бесконечное множество решений:

$$M = \{(-c - d + 1;\ \ c;\ \ d) \mid c, d \in \mathbb{R}\}.$$

При $k = -3$ системы решений не имеет.

При $k \neq 1$ и $k \neq -3$ система имеет единственное решение $\left(\frac{2}{k+3};\ \ \frac{1}{k+3};\ \ \frac{1}{k+3}\right)$.

Ответ.

При $k = 1$ система имеет бесконечное множество решений:

$$M = \{(-c - d + 1;\ \ c;\ \ d) \mid c, d \in \mathbb{R}\}.$$

При $k = -3$ системы решений не имеет.

При $k \neq 1$ и $k \neq -3$ система имеет единственное решение $\left(\frac{2}{k+3};\ \ \frac{1}{k+3};\ \ \frac{1}{k+3}\right)$.