Лекция 2.

Системы линейных уравнений. Метод гаусса. Часть 1

На предыдущей лекции мы узнали, что любая система линейных уравнений либо имеет одно решение, либо имеет бесконечно много решений, либо не имеет решений. На данной лекции мы поговорим о тех случаях, когда система уравнений имеет одно решение или не имеет решений.

Начнём с такого несложного примера:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 1 \\ \qquad\qquad 7x_3 = 0 \end{cases}$$

Выразим сначала неизвестную x_3, затем x_2, далее через уже найденные x_3и x_2 найдем x_1:

$$\sim \begin{cases} 7x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 1 - 2x_3 \\ 3x_1 = 2 - 2x_2 - 3x_3 \end{cases} \sim\sim \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 1. \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Таким образом, получаем единственное решение данные системы:

$$x_3 = 0, x_2 = 1, x_1 = 0.$$

Ещё раз посмотрим на систему, которую мы смогли быстро решить, выразив последовательно снизу вверх значения неизвестных:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 1\,. \\ \qquad\qquad 7x_3 = 0 \end{cases}$$

Такого вида СЛУ называют ступенчатыми. Дадим соответствующее определение.

Система линейных уравнений называется ступенчатой, если она
1) не содержит нулевых уравнений,
2) для первых ненулевых коэффициентов ее уравнений

$$a_{1k},\ a_{2r},\ \dots,\ a_{mt}$$

номера неизвестных при них возрастают:

$$k < r < \ \dots\ < t.$$

Система, которую мы решили не имеет нулевых уравнений, индексы переменных x_1и x_2 и x_3 при первых ненулевых коэффициентах возрастают. Значит, эта система ступенчатая:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 1\,. \\ \qquad\qquad 7x_3 = 0 \end{cases}$$

Мы говорили, что для работы с системами линейных уравнений удобно использовать их матричную запись. Запишем расширенную матрицу предыдущей системы:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ \phantom{3x_1 + {}} 1x_2 + 2x_3 = 1 \\ \phantom{3x_1 + 2x_2 + {}} 7x_3 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Будем называть первые ненулевые элементы строк матрицы ведущими элементами. Тогда ступенчатую матрицу, соответствующую ступенчатой системе, можно определить следующим образом:

Ступенчатая матрица – это матрица, в которой:

1) нет нулевых строк,

2) номера столбцов ее ведущих элементов

$$a_{1k},\ a_{2r},\ \dots,\ a_{mt}$$

возрастают:

$$a_{1k},\ a_{2r},\ \dots,\ a_{mt}.$$

Приведем примеры.

1. Матрица, соответствующая ступенчатой СЛУ из предыдущего примера. Обратите внимание, что для ступенчатой матрицы мы можем нарисовать «ступеньки»:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Матрица с «различной длинной ступенек»:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Не ступенчатая матрица:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

В данной матрицы ведущий элемент третьей строки находится левее предыдущего, то есть его индекс меньше, и условие определения ступенчатой матрицы не выполняется.

В общем случае для поиска решений произвольной СЛУ используют метод Гаусса. Нам известно, что с помощью элементарных преобразований получается система (матрица), эквивалентная данной. Метод Гаусса основан на идее сведения СЛУ (ее матрицы) к равносильной ей ступенчатой системе.

После получения такой системы для нахождения решений необходимо последовательно выразить переменные.

Заметим, что если система имеет только нулевые коэффициенты (в ее матрице только нулевые элементы), то после применения к ней элементарных преобразований ничего не изменится. Такие нулевые системы (матрицы) равносильны нулевому уравнению. Для ненулевых СЛУ справедлива следующая

Теорема. *Любую ненулевую СЛУ (ненулевую матрицу) с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.*

Приведем следующую СЛУ к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \\ -4 & -6 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Начнем преобразования с первого столбца. Чтобы система была ступенчатой, под ведущим элементом первой строки нам нужно получить нули. Для этого прибавим к третьей строке две первые:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \\ -4 & -6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +2I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Получили ступенчатую матрицу. В ней каждый ведущий элемент расположен правее ведущего элемента предыдущей строки.

На вопрос о множестве решений ступенчатой СЛУ отвечает следующая

Теорема. *Для любой ступенчатой системы линейных уравнений возможен точности один из случаев:*

1. Система имеет противоречивое уравнение и значит не имеет решений, то есть является несовместной.

2. В системе нет противоречивого уравнения. Тогда

– либо число уравнений системы равно числу неизвестных, и такая система имеет ровно одно решение,

– либо число уравнений меньше числа неизвестных, и система имеет бесконечно много решений.

Рассмотрим пример:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}.$$

Приведем систему к ступенчатому виду. Перейдем к матрице:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Начнем с первого столбца. Нужно получить под ведущим элементом первой строки ноль. Для этого можно из второй строки вычесть ½ первой строки. Но, чтобы не получать дроби, мы применим элементарное преобразование перестановки строк местами. Поменяем первую и вторую строки и вычтем из второй строки две первых:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{-2I} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу. Она соответствует системе:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ \quad -3y = 3 \end{cases}.$$

Наша система имеет одно решение:

$$y = -1 \Rightarrow x = 2$$

$$M = \{(2, \ -1)\}$$

Итак, мы нашли решение данной системы методом Гаусса. Рассмотрим решение этой системы с геометрической точки зрения. Каждое уравнение системы соответствует некоторой прямой на плоскости Oxy:

$$ax + by = c \xleftrightarrow{a\neq 0 \text{ или } b\neq 0} \text{прямая на } Oxy.$$

Действительно, если коэффициент b не равен нулю, то мы получим график линейной функции:

$$b \neq 0 \Longrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} = kx + l$$

Если же коэффициент b равен нулю, но $a \neq 0$, мы получим прямую, параллельную оси Ox:

$$b = 0, \ a \neq 0 \Longrightarrow x = \frac{c}{a} = l.$$

Система

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

с геометрической точки зрения соответствует двум прямым, а ее множество решений – множеству общих точек этих прямых. В данном случае прямые пересекаются в точке A и решение одно, оно соответствует координатам точки A (рис. 1).

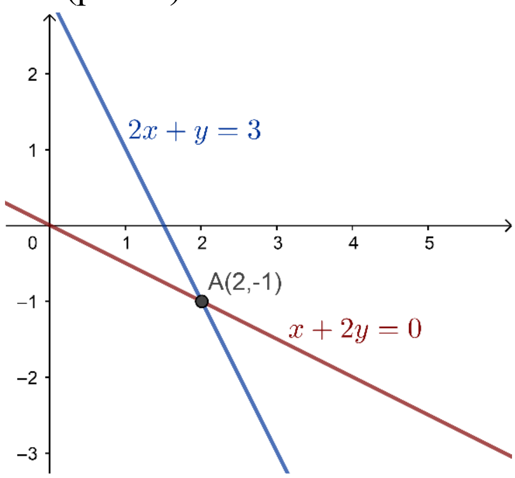

Рис. 1

Возьмем следующую СЛУ:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

Первая строка ее матрицы начинается на 2. Для упрощения дальнейших вычислений поменяем первую и последнюю строки, чтобы получить первую строку с ведущим элементом 1:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Начнем с первого столбца. Обнулим элементы, находящиеся под ведущим элементом первой строки:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -I \\ -2I \end{matrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перейдем ко второму столбцу и обнулим элемент, находящийся под ведущим элементом второй строки:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу. Перейдем к соответствующей системе:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3y - 2z = -2 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Последовательно снизу-вверх находим значение неизвестных:

$$z = 1 \Rightarrow y = (-2 + 2z) : 3 = 0 \Rightarrow x = 2 + y - z = 1$$

Снова получили одно решение:

$$M = \{(1,\ 0,\ 1)\}$$

Рассмотрим геометрическую интерпретацию последней СЛУ:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}.$$

Каждое уравнение данной системы соответствуют плоскости в пространстве $Oxyz$:

$$ax + by + cz = d \xleftrightarrow{a\neq 0 \text{ или } b\neq 0 \text{ или } c\neq 0} \text{плоскость на } Oxyz\ .$$

Решением всей системы в данном случае стала точка пересечения этих плоскостей (рис. 2).

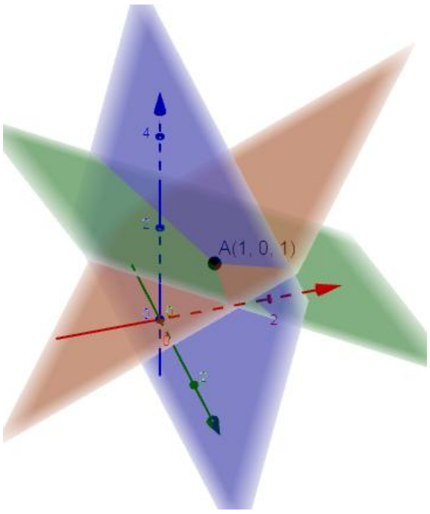

Рис. 2

Перейдем к следующему примеру:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 30 \end{cases}.$$

Заметим, что левые части уравнений системы пропорциональны. поэтому мы можем вычесть из второго уравнения два первых. Раз решение короткое, мы не будем переходить к матрицам:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 30 \quad -2I \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 0x + 0y = 24 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 0 = 24 \end{cases}.$$

Получили систему с противоречивым уравнением. Значит, система решений не имеет, множество ее решений пусто:

$$M = \emptyset .$$

Геометрически системе соответствуют две параллельные прямые, они не имеют общих точек (рис. 3).

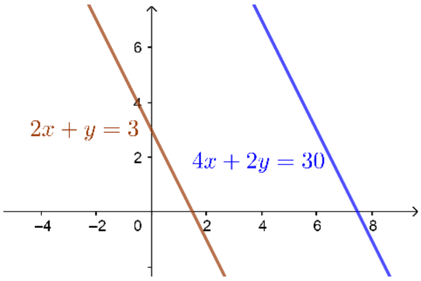

Рис. 3

Другой пример:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 4x + 2y + 2z = 30 \end{cases}.$$

Снова левые части уравнений пропорциональны и после преобразования получим противоречивое уравнение:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 4x + 2y + 2z = 30 \quad -2I \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 0 = 24 \end{cases}.$$

Множество решений СЛУ пусто:

$$M = \emptyset$$

Геометрические системе соответствует две параллельные плоскости (рис. 4).

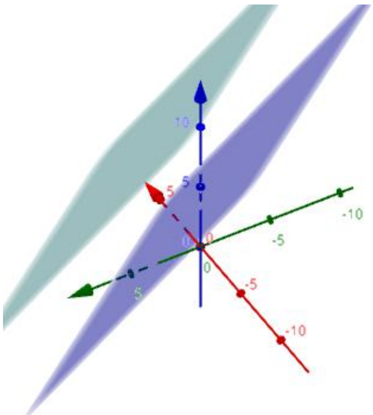

Рис. 4

В заключение рассмотрим еще один пример приведения матрицы к ступенчатому виду. Пусть дана СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

В матрице данной системы ведущий элемент первой строки 1. Обнулим все элементы первого столбца, находящиеся под ним:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ -I \\ -I \\ -3I \end{array} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее обнулим элементы второго столбца, расположенные ниже ведущего элемента второй строки. Для этого из третьей строки можно вычесть 4/3 второй строки. Но можно применить следующий прием: уравновесим коэффициенты этих двух строк, умножив вторую строчку на 4, а четвертую строчку над 3. Затем вычтем из одной другую:

$$\sim \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \cdot 4 \\ \\ \cdot 3 \end{array} \end{array} \sim \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 12 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ -II \end{array} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Останется обнулить последний элемент третьего столбца. Попутно можно уменьшить элементы второй строки, помножив ее на ¼ (то есть поделив на 4):

$$\sim \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ :4 \\ \\ -2III \end{array} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что последняя строка полученной матрицы соответствует противоречивому уравнению

$$0 = -3.$$

Значит, вся система решений не имеет, множество решений пусто: $M = \emptyset$.