Системы линейных уравнений. Элементарные преобразования

Мы начинаем изучать раздел математики под названием «Линейная алгебра». Первая лекция посвящена основным понятиям, связанным с системами линейных уравнений.

Определим понятие линейного уравнения. Вспомним вначале, что такое уравнение. Уравнением называется равенство двух алгебраических выражений, зависящих от некоторого набора переменных $x_1, \ldots, x_n$ и имеющее вид:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n),$$

где f и g – функции от данных переменных.

Переменные $x_1, \ldots, x_n$ также называют неизвестными уравнения.

Некоторые переменные могут отсутствовать в одной из частей уравнения. Часто все слагаемые, содержащие переменные, переносят в левую часть, а в правой части оставляют только число.

Линейное уравнение – это уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

где числа $a_1, \ldots, a_2$, b называются коэффициентами уравнения, b – свободный коэффициент (или свободный член).

Рассмотрим произвольное линейное уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b.$$

С помощью круглых скобок следующим образом

$$(r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

будем обозначать упорядоченный набор элементов $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Такие наборы из n элементов называют -ками. Если n=2, то n-ку называют парой, если n=3, – тройкой, и т. д.

Последовательность чисел $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ называется решением уравнения, если при подстановке этих чисел вместо переменных, уравнение обращается в верное равенство. При этом число r_1 подставляется вместо переменной x_1, r_2 – вместо переменной x_2 и т. д.

Решить уравнение, означает, найти все его решения, или доказать, что решений нет.

Уравнения называются равносильными (или эквивалентными), если они имеют одно и то же множество решений. Для обозначения равносильных уравнений используем знаки $\Leftrightarrow$ и $\sim$.

Рассмотрим некоторые простейшие виды линейных уравнений.

Линейное уравнение называют нулевым, если все его коэффициенты (и слева, и справа) равны 0:

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0.$$

Тогда в левой части все слагаемые обнулятся и такое уравнение можно записать кратко:

$$0 = 0.$$

Решением нулевого уравнения является любая упорядоченная n-ка действительных чисел. Это множество решений можно записать, заключив множество решений в фигурные скобки:

$$M = \{(r_1, r_2, \ldots, r_n) \mid r_i \in \mathbb{R}\}.$$

В общем случае, для задания множества используют такую схему:

$$\{\,\alpha \mid \text{характеристика } \alpha\} -$$

вначале внутри фигурных скобок указывают обозначение элементов, из которых состоит множество, затем ставят черту, после которой записывают, каким свойством характеризуются элементы этого множества.

В обозначениях использовано специальное написание буквы $\mathbb{R}$, она обозначает множество всех действительных чисел.

Если в линейном уравнении все коэффициенты при переменных равны 0, а свободный коэффициент не равен 0:

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b \neq 0 \ \sim \ 0 = b,$$

то уравнение называют противоречивым. Такое уравнение не имеет ни одного решения, так как левая часть всегда обращается в 0, а правая часть ненулевая. Таким образом, противоречивое уравнение имеет пустое множество решений, которое можно записать следующим образом:

$$M = \emptyset.$$

Теперь рассмотрим пример линейного уравнения с двумя переменными:

$$x_1 + x_2 = 1.$$

Когда уравнение содержит две переменные, для простоты записи вместо переменных x_1, x_2 используют буквы без индексов x, y:

$$x + y = 1\,.$$

Решением такого уравнения является множество числовых пар, удовлетворяющих уравнению. Эти пары можно изобразить графически в системе координат Oxy (рис. 1).

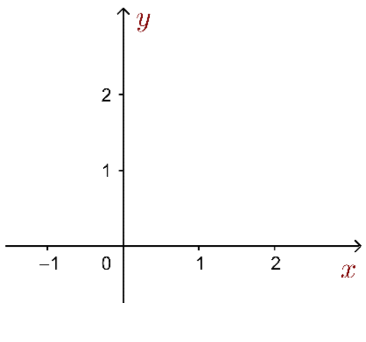

Рис. 1

Укажем некоторые решения (рис 2).

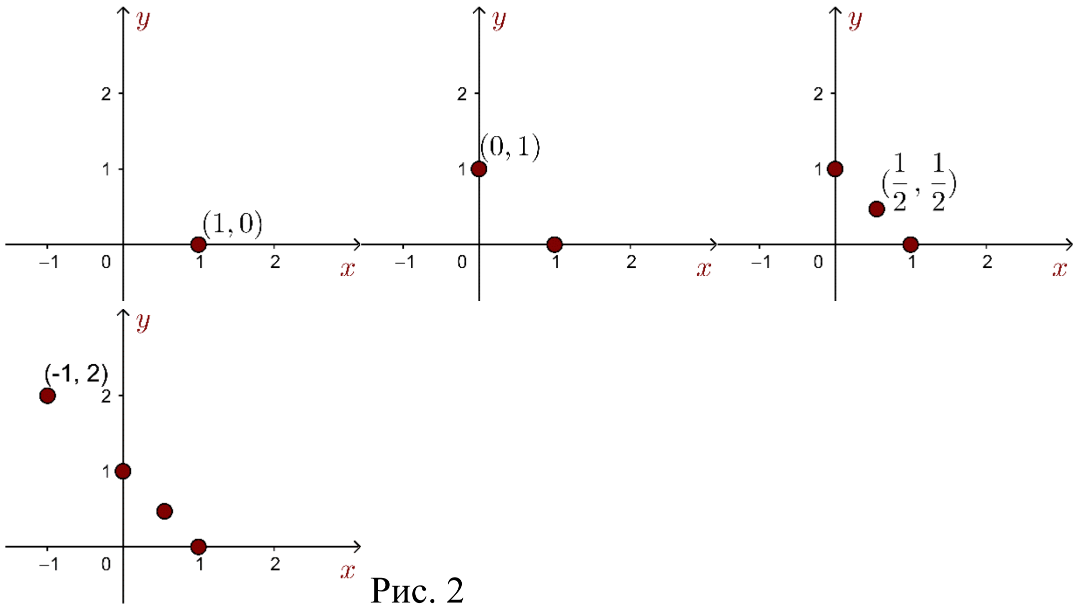

Рис. 2

Очевидно, решениями являются пары: (1; 0), (0; 1), (–1; 2), (0,5; 0,5).

Если выразить y через x, то видно, что каждому числу x соответствует y, то есть уравнение имеет бесконечно много решений. При этом все решения лежат на одной прямой, которая является графиком линейной функции $y = 1 - x$ (рис. 3).

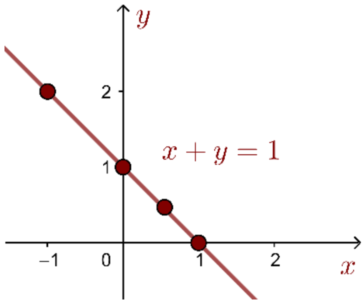

Рис. 3

Итак, множество решений данного уравнения представляет собой множество пар (x, y), где x – любое действительное число, а y может быть выражено через x. Это множество записывается вот так:

$$M = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y = 1 - x\} = \{(x,\ 1 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Обратим внимание, что над уравнениями часто выполняют преобразования. Сделаем некоторые уточнения и приведем примеры. Во-первых, нас интересуют такие преобразования, которые не изменяют линейность уравнения. Например, если возвести уравнение в квадрат, то линейное уравнение станет квадратным. Такое преобразование в нашей теме не рассматривается.

Во-вторых, при выполнении некоторых преобразований мы получаем равносильное уравнение, а другие преобразования изменяют множество решений. Например, если умножить обе части уравнения на одно и то же ненулевое число, множество решений не изменится.

Например, возьмем уравнение

$$0{,}5x + 0{,}5y = 0{,}5$$

и умножим это уравнение на 2:

$$0{,}5x + 0{,}5y = 0{,}5 \;|\cdot 2 \quad \sim \quad x + y = 1.$$

Множество решений и первого, и второго уравнений представляет собой одну и ту же прямую.

Но умножив обе части исходного уравнения на 0, получим нулевое уравнение, множеством решений которого являются все пары действительных чисел, то есть все точки на плоскости (а не только прямая):

$$0{,}5x + 0{,}5y = 0{,}5 \quad \nsim \quad 0x + 0y = 0.$$

Как видим, множество решений исходного уравнения изменилось.

Далее рассмотрим понятие системы линейных уравнений и более подробно поговорим об основных типах преобразований, которые не изменяют множество решений.

Часто при решении задач возникает необходимость найти n-ки чисел, являющиеся решениями сразу нескольких уравнений. В этом случае данные уравнения объединяют в систему. Сокращенно системy линейных уравнений называют СЛУ. В общем виде для обозначения коэффициентов уравнений используют двойные индексы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Первый индекс обозначает номер уравнения в системе, второй индекс соответствует индексу переменной. Отметим, что, в частности, параметр m может равняться 1, тогда система состоит из одного уравнения.

Числа a_{ij} называются коэффициенты системы, а числа b_i – ее свободными коэффициентами.

Решением СЛУ называется n-ка чисел, являющаяся решением каждого уравнения этой системы. Решить систему, означает, найти все ее решения, или доказать, что решений нет. Другими словами, нужно найти множество всех решений системы. В частности, это множество может быть пустым (например, в случае, если система содержит противоречивое уравнение).

Если система не имеет решений (то есть множество решений пусто), ее называют несовместной. Если решения есть, система называется совместной.

Приведем примеры.

1. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

Это несовместная система, она не имеет решений. Действительно, у двух уравнений одинаковы левые части, а правые части различны. Если бы решение существовало, то некоторое число должно быть равно одновременно 0 и 4, что невозможно.

2. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ \quad 2y = 2 \end{cases}$

Эта система имеет одно решение, которое легко находится (из второго уравнения выражаем y, подставляем в первое уравнение, откуда выражаем x):

$$M = \{(-2, 1)\}.$$

3. $\{x + y = 1$

Получаем случай, когда система имеет бесконечное множество решений. Этот пример уравнения мы рассматривали выше, множество его решений соответствует точкам прямой (рис. 4):

$$M = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y = 1 - x\}.$$

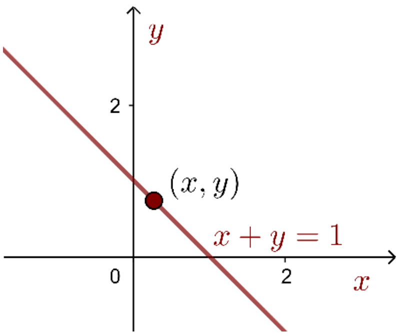

Рис. 4.

Рассмотрим основные преобразования систем линейных уравнений. Такие преобразования называют элементарными.

1 тип: умножение обеих частей уравнения системы на ненулевое число (пример такого преобразования был выше рассмотрен).

2 тип: прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число (складываем уравнения почленно). В частности, можно просто к одному уравнению прибавить другое. Вместо операции сложения можно выполнять вычитание.

3 тип: перестановка уравнений местами.

4 тип: удаление из системы или добавление нулевого уравнения.

Указанные типы преобразований не изменяют множество решений системы, то есть получаемая система является равносильной исходной. Поэтому эти преобразования можно использовать для поиска решений систем.

Рассмотрим примеры.

1. $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

Выполним преобразование 2 типа: из первого уравнения вычтем второе (другими словами, к первому уравнению прибавляем второе, умноженное на число (–1)):

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \color{blue}{-II} \\ 2x + y = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 0x + y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}.$$

Обратите внимание, что первое уравнение меняется, а второе уравнение остается прежним. Из полученной системы легко найти решение. Значение переменной y мы получили сразу, а затем подстановкой во второе уравнение находим x:

$$y = 1 \Rightarrow 2x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0.$$

Итак, система имеет одно единственное решение – пару (0; 1). Множество решений запишется так:

$$M = \{ (0,\ 1) \}.$$

2. Изменим второе уравнение системы: $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}.$

Теперь вычтем из первого уравнения второе, умноженное на 2 (другими словами, к первому уравнению прибавим второе, умноженное на (–2)):

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \color{blue}{-2II} \\ x + y = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 0 = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}.$$

Получим систему, в которой первое уравнение является нулевым. Вычеркнув нулевое уравнение, получим систему из одного уравнения:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \sim \{x + y = 1.$$

Множество решений этой системы нам уже известно. Итак, исходная система имеет бесконечное множество решений. Это множество пар вида (x, 1–x), где x – произвольное действительное число:

$$M = \{(x,\ 1 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

При исследовании систем линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

удобно работать с таблицей, составленной из коэффициентов системы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Такую таблицу называют матрицей (расширенной матрицей системы). Числа, составляющие матрицу, называются ее элементами. Матрица разбивается на строки и столбцы. Число строк равно числу уравнений. Каждая переменная порождает свой столбец. Последний столбец матрицы состоит из свободных членов. Таким образом, число столбцов на единицу больше числа переменных.

Записывая матрицу, мы отвлекаемся от обозначений переменных, что никак не влияет на множество решении системы. То есть по матрице коэффициентов система уравнений восстанавливается однозначно:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем, вместо преобразований уравнений системы, мы очень часто будем преобразовывать только строки матрицы. Эта идея позволяет сократить число записываемых символов при работе с системой уравнений.

Итак, каждому преобразованию уравнений системы соответствует преобразование строк матрицы. Рассмотрим соответствующие элементарные преобразования матриц:

1 тип: умножение любой строки матрицы на ненулевое число, то есть каждый элемент строки умножается на указанное число.

2 тип: прибавление к одной строке другой, умноженной на число, то есть к каждому элементу строки прибавляем соответствующий элемент другой строки, умноженный на указанное число. В частности, из одной строки можно вычесть другую строку, умноженную на число.

3 тип: перестановка строк местами.

4 тип: удаление или приписывание нулевой строки, то есть троки, состоящей из одних нулей. Рассмотрим примеры.

Возьмем уже рассмотренные выше преобразования систем, и покажем соответствующие преобразования с матрицами.

1. $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \, -II \\ 2x + y = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

$\updownarrow$

$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-II} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Из первой строки вычитаем вторую. Первая строка изменяется, вторая нет.

2. $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \, -2II \\ x + y = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 0 = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \sim \{x + y = 1$

$$\updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-2II} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

После перехода к матрице хорошо видно, что первая строка равна второй, умноженной на число 2. Поэтому вычитая из первой строки две вторых (из первой вычитаем вторую, умноженную на 2), первая строка становится нулевой.

Для дальнейшего изучения линейной алгебры дадим определение. Две строки матрицы, одна из которых равна другой, умноженной на число, называются пропорциональными. В данном примере имеем две пропорциональные строки.