Экстремум функции двух переменных.

Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области (Часть 2)

Задание 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ внутри замкнутой области *D*, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 4$. (рис. 1).

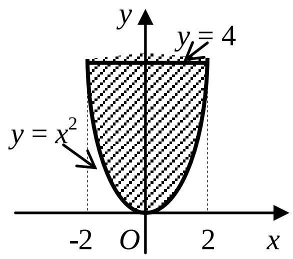

Рис. 1

Решение.

1. Найдем стационарные точки внутри области *D*:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + 8x - 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 2x.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 6x^2 + 8x - 2y = 0 \\ 2y - 2x = 0 \end{cases},$$

получаем две стационарные точки: $(0;0)$ и $(-1;-1)$**,** из которых ни одна не лежит внутри заданной области.

2. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на границе области *D*:

1) На границе, заданной уравнением $y = x^2$, имеем $z(x) = x^4 + 4x^2$, где $x \in [-2;2]$**.** Находим критические точки: $z'(x) = 4x^3 + 8x$, $z'(x) = 0$ при $x = 0$, $z(0) = 0$.

$z(-2) = z(2) = 32$.

2) На границе, заданной уравнением $y = 4$ имеем $z(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$, где $x \in [-2;2]$**;** $z'(x) = 6x^2 + 8x - 8$; внутри данного отрезка $z'(x) = 0$ при $x = \frac{2}{3}$, $z\left(\frac{2}{3}\right) = 13\frac{1}{27}$; $z(-2) = z(2) = 32$.

Сопоставляя найденные значения функции, приходим к выводу, что на границе области *D* функция принимает наибольшее значения в точках $(-2;4)$ и $(2;4)$, а наименьшее в точке $(0;0)$**.**

3. Таким образом, функция $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ свои наименьшее и наибольшее значения достигает в точках, лежащих на границе области *D*

$$z_{\text{наиб}} = z(-2;4) = z(2;4) = 32, \quad z_{\text{наим}} = z(0;0) = 0.$$

Задание 2. Из всех треугольников данного периметра 2*p* найти тот, который имеет наибольшую площадь.

Решение. Пусть *a*, *b*, *c* – стороны искомого треугольника. По формуле Герона

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Положим $a = x$, $b = y$, $c = 2p - x - y$, тогда площадь треугольника будет определяться функцией

$$S(x; y) = \sqrt{p(p - x)(p - y)(x + y - p)}$$

Условия $0 < x < p$, $0 < y < p$ определяют открытую область *D*, ограниченную прямыми: $x = 0$, $x = p$, $y = 0$, $y = p$.

Найдем стационарные точки функции $S(x; y)$ внутри области *D*.

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{p(p - y)(2p - 2x - y)}{\sqrt{p(p - x)(p - y)(x + y - p)}}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{p(p - x)(2p - x - 2y)}{\sqrt{p(p - x)(p - y)(x + y - p)}}.$$

В треугольнике длина стороны меньше полупериметра *p*, следовательно, $p - x \neq 0$ и $p - y \neq 0$, поэтому стационарные точки мы найдем из системы

$$\begin{cases} 2p - x - 2y = 0, \\ 2p - 2x - y = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $x_0 = y_0 = \dfrac{2p}{3}$, $S(x_0; y_0) = \dfrac{p^2\sqrt{3}}{9}$.

Во всех точках границы области *D* рассматриваемый треугольник вырождается в отрезок: $S_\Delta = 0$.

Очевидно, что при $a = b = \dfrac{2p}{3}$ площадь треугольника принимает наибольшее значение. Так как $a = b = \dfrac{2p}{3}$, то $c = \dfrac{2p}{3}$, т. е. искомый треугольник является равносторонним.

Дополнительные задачи

Задание 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 y(2 - x - y)$ в замкнутой области *D*, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Ответ: $z_{\text{наим}} = z(4;2) = -128$, $z_{\text{наиб}} = z\left(1; \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Задание 2. Разложить положительное число *a* на три положительных слагаемых так, чтобы их произведение имело наибольшее значение.

Ответ: $\dfrac{a}{3}$, $\dfrac{a}{3}$, $\dfrac{a}{3}$.