Несобственные интегралы

Задание 1. Вычислить интеграл: $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$.

Решение. Данный интеграл – несобственный интеграл первого рода.

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{-1}{x}\right|_{1}^{b}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-1}{b}+1\right)=1.$$

Задание 2. Вычислить интеграл: $\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2}$.

Решение. Функция $y=\frac{1}{x^2}$ не определена в точке $x=0$ на рассматриваемом интервале

интегрирования (интеграл от разрывной функции). Представим интеграл в виде суммы двух несобственных интегралов второго рода:

$$\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2}=\int\limits_{-2}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{-2}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\delta\to0}\int\limits_{0+\delta}^{2}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\left.\frac{-1}{x}\right|_{-2}^{-\varepsilon}+\lim_{\delta\to0}\left.\frac{-1}{x}\right|_{\delta}^{2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2}\right)+\lim_{\delta\to0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{\delta}\right)=\infty+\infty=\infty.$$

Числового значения не получилось. Интеграл расходится.

Задание 3. Найти значение несобственного интеграла или установить его расходимость $\int\limits_{-\infty}^{0}xe^{x}dx$.

Решение. Для вычисления несобственного интеграла первого рода используем

формулу интегрирования по частям под знаком предела:

$$\int\limits_{-\infty}^{0}xe^{x}dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}xe^{x}dx=\left[\begin{array}{c|c}u=x & du=dx\\ dv=e^{x}dx & v=e^{x}\end{array}\right]=\lim_{a\to-\infty}\left[\left.xe^{x}\right|_{a}^{0}-\int\limits_{a}^{0}e^{x}dx\right]=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left[-ae^{a}-(1-e^{a})\right]=-1.$$

Следовательно, интеграл сходится.

Задание 4. Найти значение несобственного интеграла или установить его расходимость $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$.

<u>Решение</u>. Интеграл с двумя бесконечными пределами представляют в виде суммы двух

интегралов:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx + \int\limits_{0}^{+\infty} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} e^x dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}(1-e^a) + \lim_{b\to+\infty}(e^b-1) = +\infty .$$

Интеграл расходится.

Дополнительные задачи

1. Исследовать на сходимость $\int\limits_{-\infty}^{0} x\cos x dx$ (расходится).

2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^4 x}$ (Отв. $\frac{1}{3}$).

3. Найти значение несобственного интеграла или установить его расходимость $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$

(Отв. $2\sqrt{3}$).

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, осью OX, $x = 1$ $(x \geq 1)$ (Отв. 1);

б) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in (-\infty, \infty)$ (Отв. π).