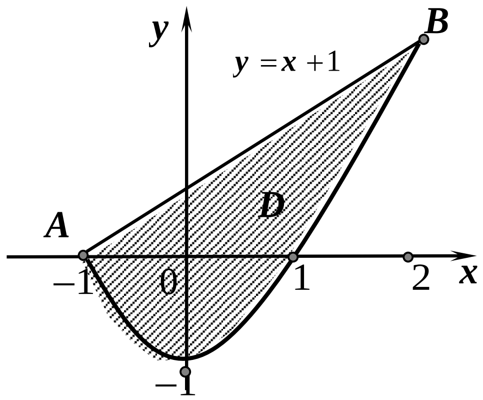
Приложения определенного интеграла

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 1$ и прямой $y = x + 1$.

Решение. Находим точки пересечения. Строим кривые:

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \qquad A(-1, 0) \quad \text{и} \quad B(2, 3)$$



Площадь фигуры равна:

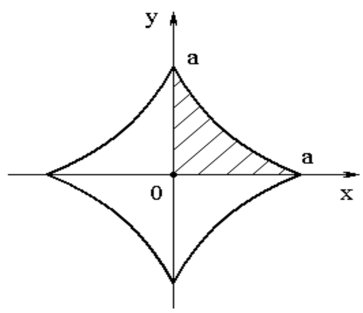
$$S = \int_{-1}^{2} \left[(x+1) - (x^2 - 1)\right] dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (x - x^2 + 2) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{4}{2} - \frac{8}{3} + 4\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2\right) = \frac{29}{3}.$$

Задание 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}.$$



Решение. Фигура симметрична относительно начала координат.

Можно вычислить через четверть искомой площади:

$$S = 4\int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)\, dt = \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \;\Rightarrow\; a\cos^3 t = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = \dfrac{\pi}{2} \\ x_2 = a \;\Rightarrow\; a\sin^3 t = 0 \;\Rightarrow\; t_2 = 0 \end{array}\right] =$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt = -12a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4 t \cdot \cos^2 t dt =$$

$$= -12a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4 t \cdot (1 - \sin^2 t)dt = -12a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\sin^4 t - \sin^6 t)dt =$$

$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t-\sin^6 t)dt=12a^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^3 dt\right]=\ldots=\frac{3}{8}\pi a^2$$

Задание 3. Найти длину дуги кривой $y=\ln\sin x$, $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Кривая задана в прямоугольной системе координат $y=f(x)$. Длина находится по формуле $L=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

$$L=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1\cdot\sin x\,dx}{\sin x\cdot\sin x}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-d\cos x}{1-\cos^2 x}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cos x}{\cos^2 x-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{\cos\frac{\pi}{2}-1}{\cos\frac{\pi}{2}+1}\right|-\ln\left|\frac{\cos\frac{\pi}{3}-1}{\cos\frac{\pi}{3}+1}\right|\right]=\frac{1}{2}\left(\ln 1-\ln\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}=\ln\sqrt{3}.$$

Задание 4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=2x$.

Решение. Прямая и парабола пересекаются в точках $x=0$ и $x=2$.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, образованной кривыми $y_1(x)$ и $y_2(x)$, где $y_1(x)\le y_2(x)$ при $x\in[0,2]$, равен:

$$V=\pi\int_0^2\left[y_2^{\,2}(x)-y_1^2(x)\right]dx=\pi\left[\int_0^2(2x)^2dx-\int_0^2(x^2)^2dx\right]=\pi\left[\int_0^2 4x^2dx-\int_0^2 x^4dx\right]=$$

$$=\pi\left(4\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=\frac{64}{15}\pi.$$

Дополнительные задачи

1. Вычислить площадь, ограниченную кривыми $y=x^2$ и $y=x^3$.

(Отв. $\frac{1}{12}$);

2. Вычислить площадь, ограниченную кривыми $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=-1$.

(Отв. $e+\frac{1}{e}-2$);

3. Найти длину участка кривой $y=\frac{x^2}{2}-\frac{\ln x}{4}$ при $x\in[1,3]$.

(Отв. $4+\frac{\ln 3}{4}$).

4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=2x$.

(Отв. $\frac{8\pi}{3}$).