Определение определенного интеграла.
Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона- Лейбница.
Методы интегрирования

Задание 1. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$.

Решение. Для функции $f(x) = \sin x$ первообразной будет функция $F(x) = -\cos x$.

Применяем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0) = 1.$$

Задание 2. Вычислить интеграл $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. Это табличный интеграл:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

Задание 3. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} x\cos x\, dx$.

Решение. Для данного интеграла необходимо применить формулу интегрирования по

частям: $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$.

$$\int_0^{2\pi} x\cos x\, dx = \left[\begin{array}{l|c} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \int \cos x dx = \sin x \end{array}\right] = x\sin x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x\, dx =$$

$$= x\sin x\Big|_0^{2\pi} + \cos x\Big|_0^{2\pi} == 2\pi \cdot \sin(2\pi) - 0 \cdot \sin(0) + \cos(2\pi) - \cos(0) = 0.$$

Задание 4. Вычислить интеграл $\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx$.

Решение. Делаем замену переменной по формуле $1 + x = t^2$.

$\sqrt{1+x} = t \quad x = t^2 - 1 \quad dx = 2tdt$.

Тогда:

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx = \left| \begin{array}{c} \sqrt{1+x}=t, \\ x=t^2-1, \\ dx=2tdt, \\ x=0 \Rightarrow t=1, \\ x=3 \Rightarrow t=2 \end{array} \right| = \int_1^2 (t^2-1)\cdot t\cdot 2tdt = 2\int_1^2 (t^4-t^2)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{116}{15}.$$

Задание 5. Вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$.

Решение. В данном интеграле можно использовать замену переменной.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx = \left[\begin{array}{l} x=\sin t \\ dx=\cos t \\ x=0 \ \Rightarrow \ t=0 \\ x=1 \ \Rightarrow \ t=\dfrac{\pi}{2} \end{array} \right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\ dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0+\frac{1}{2}\sin\pi-\frac{1}{2}\sin 0\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Задание 6. Докажите, что интеграл от нечетной функции на симметричном отрезке равен нулю $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Решение. Функция $f(x)$ - нечетная. Следовательно $f(-x) = -f(x)$.

Рассмотрим интеграл:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = J_1 + J_2;$$

$$J_1 = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} x=-t\ , \\ dx=-dt \\ x=-a \ \Rightarrow \ t=a \\ x=0 \quad \Rightarrow \ t=0 \end{array} \right] = \int_a^0 f(-t)(-dt) = \int_a^0 f(t)dt = -\int_0^a f(t)dt = -J_2.$$

Окончательно получаем: $J_1 + J_2 = 0$.

Дополнительные задачи

Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$ (Отв. $\frac{1}{3}$);

2) $\int\limits_0^2 x e^x \, dx$ (Отв. $e^2 + 1$);

3) $\int\limits_0^1 \sqrt{4 - x^2} \, dx$ (Отв. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$);

4) $\int\limits_1^e (x+1) \ln x \, dx$ (Отв. $\frac{e^2 + 5}{4}$);

5) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \, dx$ (Отв. $7 + 2\ln 2$);

6) $\int\limits_{-2\pi}^{2\pi} x^2 \sin^3 x \, dx$ (Отв. 0).