Теоретический материал (часть 1)

Асимптоты графика функции

Определение 1. Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется такая прямая, расстояние d до которой от точки $M(x; f(x))$ графика функции, стремится к нулю при неограниченном удалении точки M от начала координат (рис. 1).

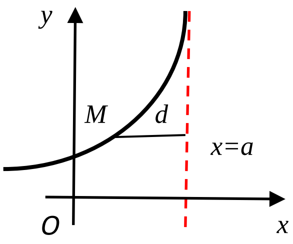

Рис.1

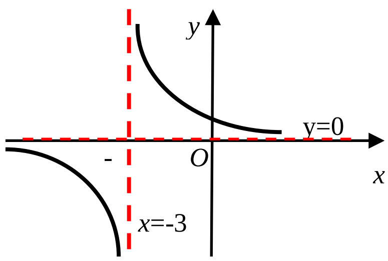

Рис.2

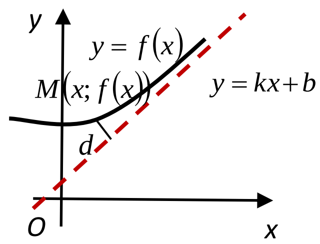

Рис.3

Различают вертикальные, наклонные и горизонтальные асимптоты.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вертикальную асимптоту, если выполняется, хотя бы одно из условий: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$.

Как правило, x_0 – это точки разрыва второго рода. Непрерывные функции, определенные на всей числовой прямой, не имеют вертикальных асимптот.

Например, график функции $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ имеет вертикальную асимптоту $x = -3$ (рис.2), так как $\lim\limits_{x \to -3-0} \dfrac{1}{x+3} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -3+0} \dfrac{1}{x+3} = \infty$.

Определение 3. Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$ (рис.3).

Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b$ ($\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - kx] = b$).

Частным случаем наклонной асимптоты (при $k = 0$) является горизонтальная асимптота.

Определение 4. Прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (соответственно $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$).

Например, график функции $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$, помимо вертикальной асимптоты $x=-3$, имеет горизонтальную асимптоту $y=0$ (рис. 2), так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x+3}=0$.

Пример 1. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

<u>Решение.</u> Функция непрерывна всюду, кроме точки $x=1$, в которой она имеет разрыв второго рода, причем $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2}{x-1}=+\infty$, следовательно, $x=1$ – вертикальная асимптота.

Исследуем функцию на наклонную асимптоту:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$, следовательно, $k=1$;

$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=1$, получили $b=1$.

Таким образом, прямая $y=x+1$ – наклонная асимптота графика функции.

Пример 2. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2}$.

<u>Решение.</u> Функция непрерывна всюду, кроме точки $x=0$, в которой она имеет разрыв второго рода, причем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x-1|}{x^2}=+\infty$, следовательно, $x=0$ – вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты (если они существуют). Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{|x-1|}{x^2}\cdot\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{|x-1|}{x^3}=0$, $k=0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{|x-1|}{x^2}-0\cdot x\right)=0$, $b=0$, то прямая $y=0$ является частным случаем наклонной асимптоты – горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2}$.