Геометрический и физический смысл производной. Уравнения касательной и нормали. Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков

Задание 1. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y^2 = 4x$ в точке $M_0(1;\,2)$.

Решение.

Уравнение касательной будем искать в виде $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, уравнение нормали – $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Найдем $f'(x)$ как производную функции, заданной неявной уравнением

$$y^2 = 4x$$

$\left(y^2\right)' = (4x)'$ или $2y \cdot y' = 4$, откуда $y' = \dfrac{2}{y}$. Таким образом, $f'(x_0) = 1$.

Уравнение касательной в точке $M_0(1;\,2)$: $y - 2 = x - 1$ или $y = x + 1$.

Уравнение нормали $y - 2 = -(x - 1)$ или $y = -x + 3$.

Задание 2. Найти уравнения касательной и нормали к эллипсу: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ в точке $M_0(x_0;\,y_0)$, для которой $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение.

$x'_t = -a\sin t$, $y'_t = b\cos t$, следовательно $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = -\dfrac{b\cos t}{a\sin t} = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t$.

Угловой коэффициент касательной в точке M_0 $k = y'_x(M_0) = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{b}{a}$.

Найдем координаты точки $M_0(x_0;\,y_0)$: $x_0 = a\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$, $y_0 = b\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}b$

Уравнение касательной в точке M_0: $y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}b = -\dfrac{b}{a}\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ или $bx + ay - ab\sqrt{2} = 0$.

Уравнение нормали $y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}b = \dfrac{a}{b}\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ или $(ax - by)\sqrt{2} - a^2 + b^2 = 0$.

Задание 3. Найти дифференциалы функций:

1) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2x^4}{1 - x^8}$; 2) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{a}$.

Решение.

$$1)\ y' = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{4x^8}{(1 - x^8)^2}\right)} \cdot \frac{8x^3(1 - x^8) - (-8x^7)2x^4}{(1 - x^8)^2} = \frac{(1 - x^8)^2(8x^3 - 8x^{11} + 16x^{11})}{(1 + x^8)^2(1 - x^8)^2} = \frac{8x^3}{1 + x^8},$$

$$dy = y'dx = \frac{8x^3}{1+x^8}dx .$$

2) Будем считать, что уравнение $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{a}$ задает неявную функцию $y=y(x)$. Продифференцируем обе части уравнения по x:

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}y'_x=0 ;$$

$$y'_x=-\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}$$

$$dy=-\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}dx .$$

Задание 4. Вычислить с помощью дифференциала приближённое значение $\sqrt[5]{31{,}8}$.

Решение.

Воспользуемся приближённым равенством $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$,

Положим $f(x)=\sqrt[5]{x}$, тогда $f'(x)=\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$.

$x_0=32$, $f(x_0)=\sqrt[5]{32}=2$

$\Delta x=-0{,}2$, $\Delta f(x)\approx df(x)=f'(x_0)\Delta x=\dfrac{1}{5\sqrt[5]{{x_0}^4}}\cdot\Delta x=\dfrac{1}{5\sqrt[5]{32^4}}\cdot(-0{,}2)=-\dfrac{1}{400}=-0{,}0025$.

Окончательно имеем: $\sqrt[5]{31{,}8}\approx 2+(-0{,}0025))=1{,}9975$.

Задание 5. Найти производные второго порядка для

1) функции $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$;

2) функции $y=y(x)$, заданной параметрически: $x=t^2$, $y=t^3$.

Решение.

1) $f'(x)=\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)'=\dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$,

$$f''(x)=\left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\right)'=\frac{-2x(x^2+1)^2-4x(x^2+1)(1-x^2)}{(x^2+1)^4}=\frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{(x^2+1)^3}=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} .$$

2) Найдем сначала производную y'_x функции, заданной параметрически, по формуле $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{(t^3)'}{(t^2)'}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t$$

Тогда функция y'_x также задана параметрически системой функций: $x=t^2$, $y'_x=\dfrac{3}{2}t$. Воспользуемся формулой

$$y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}.$$

,

$$y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{(3/2t)'}{\left(t^2\right)'} = \frac{3}{4t}.$$

Задание 6. Найти dy, d^2y, d^3y для функции $y = \sqrt[3]{x}$.

Решение.

$$dy = y'dx = \left(\sqrt[3]{x}\right)' dx = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx;$$

$$d^2y = d(dy) = d\left(\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)' dx^2 = -\frac{2dx^2}{9x\sqrt[3]{x^2}};$$

$$d^3y = d\left(d^2y\right) = d\left(-\frac{2dx^2}{9x\sqrt[3]{x^2}}\right) = \left(-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}\right)' dx^3 = \frac{10dx^3}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}.$$

Такой же результат можно получить с помощью формул $dy = y'dx$, $d^2y = y''dx^2$, $d^3y = y'''dx^3$, предварительно отыскав производные y', y'', y'''.

Дополнительные задачи

1) Зависимость между количеством x вещества, полученного в процессе некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением $x(t) = A\left(1 - e^{-kt}\right)$. Определить скорость реакции.

   Ответ: $\frac{dx}{dt} = Ake^{-kt}$.

2) Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \sin 2x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

   Ответ: $y = -x + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ – уравнение касательной,

   $y = x - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ – уравнение нормали.

3) Найти производные указанных порядков для следующих функций:

   1) $y = \operatorname{tg}3x$, $y'' = ?$
   2) $y = x \cdot \ln x$, $y''' = ?$
   3) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $y'' = ?$

   Ответы: 1) $\frac{18\sin 3x}{\cos^3 3x}$; 2) $-\frac{1}{x^2}$; 3) $-\frac{1}{\sin^3 t}$.

4) Вычислить с помощью дифференциала приближённые значения: 1) $(1{,}02)^6$; 2) $\sqrt[3]{0{,}985}$.

Ответы: 1) 1,12; 2) 0,995.

5) Найти dy, d^2y для функции $y = \sin^2 x$.

Ответ: $dy = \sin 2x dx$; $d^2y = 2\cos 2x dx^2$.