Непрерывность функции в точке. Точки разрыва и их классификация. Теоремы о свойствах функций, непрерывных на отрезке

Задание 1.

Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\begin{cases} x, & \text{при } x\le -\pi \\ \sin x, & \text{при } -\pi<x<\dfrac{\pi}{2} \\ 1, & \text{при } x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

<u>Решение</u>.

Функции $y=x$, $y=\sin x$, $y=1$ непрерывны на всей числовой прямой, поэтому $f(x)$ может иметь разрывы только в точках смены аналитического выражения функции.

1) $x_1=-\pi$: $\lim\limits_{x\to-\pi-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-\pi-0} x=-\pi$, $\lim\limits_{x\to-\pi+0} f(x)=\lim\limits_{x\to-\pi+0}\sin x=0$, $f(-\pi)=-\pi$.

$\lim\limits_{x\to-\pi-0} f(x)=f(-\pi)\ne\lim\limits_{x\to-\pi+0} f(x)$.

Следовательно, $f(x)$ в точке $x_1=-\pi$ имеет разрыв 1-ого рода и непрерывна слева. Скачок функции $f(x)$ в этой точке равен $\lim\limits_{x\to-\pi+0} f(x)-\lim\limits_{x\to-\pi-0} f(x)=\pi$. Разрыв не устраним.

2) $x_2=\dfrac{\pi}{2}$: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\sin x=1$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}1=1$, значение $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ не определено.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)=1$.

Следовательно, точка $x_2=\dfrac{\pi}{2}$ – точка устранимого разрыва для функции $f(x)$.

Таким образом, функция $f(x)$ непрерывна на $(-\infty;-\pi)\cup\left(-\pi;\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2};+\infty\right)$, $x_1=-\pi$ – точка разрыва 1-го рода, скачок, $x_2=\dfrac{\pi}{2}$ – точка разрыва 1-го рода, устранимый разрыв.

График функции $f(x)$ изображен на рис. 1.

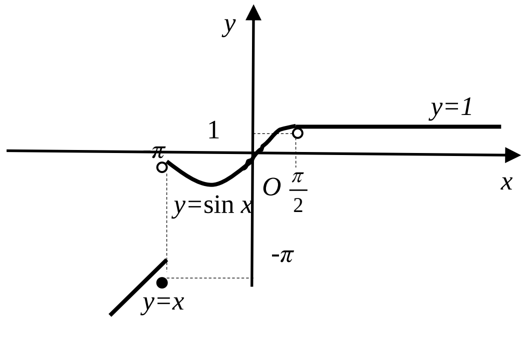

Рис.1

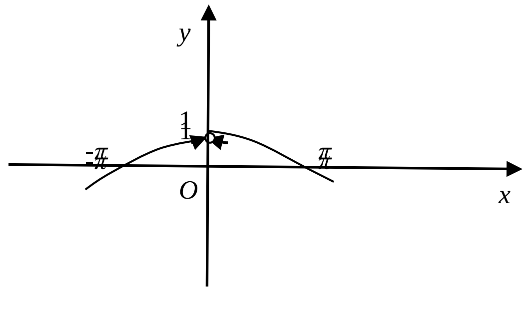

Рис.2

Задание 2.

Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

<u>Решение</u>.

В точке $x_0=0$ функция $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ не определена.

$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin x}{x}=1$, следовательно, $x_0=0$ – точка разрыва 1-го рода, устранимый разрыв.

График функции $f(x)$ изображен на рис. 2.

Положим значение функции в точке 0 равным 1, тогда новая функция $F(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x\neq 0\\ 1 & \text{при } x=0\end{cases}$ будет непрерывной в точке $x_0=0$.

Задание 3.

Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$.

<u>Решение.</u>

$D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$.

$\lim\limits_{x\to -1-0} e^{\frac{1}{x+1}}=0 \quad \left(\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{1}{x+1}=-\infty\right)$

$\lim\limits_{x\to -1+0} e^{\frac{1}{x+1}}=+\infty \quad \left(\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{1}{x+1}=+\infty\right)$;

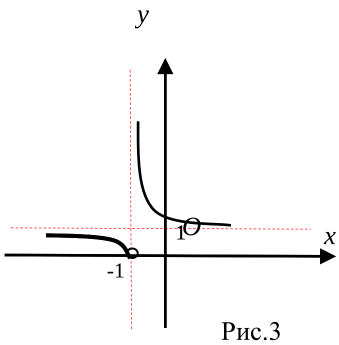

Рис.3

Следовательно, $x_0=-1$ – точка разрыва 2-ого рода, так как предел справа бесконечный. График функции $f(x)$ представлен на рис. 3.

Задание 4.

Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^2-4x+3}$.

<u>Решение.</u>

$D(f)=(-\infty;1)\cup(1;3)\cup(3;\infty)$.

Определим, характер разрыва функции в точках: $x_1=1$ и $x_2=3$.

1) Точка $x_1=1$ является точкой разрыва 2-ого рода, так как: $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x^2-3x}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x(x-3)}{(x-1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x}{x-1}\overset{\left(\frac{1}{-0}\right)}{=}-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{x^2-3x}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{x}{x-1}\overset{\left(\frac{1}{+0}\right)}{=}+\infty$.

2) Точка $x_2=3$ является точкой устранимого разрыва, так как:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-4x+3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x}{x-1}=1{,}5.$$

Таким образом, функция непрерывна на $(-\infty;1)\cup(1;3)\cup(3;\infty)$; точка $x_1=1$ является точкой разрыва 2-ого рода; точка $x_2=3$ является точкой 1-ого рода, а именно, точкой устранимого разрыва.

Дополнительные задачи

Задание.

Исследовать на непрерывность функции:

1) $f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-3x+2}$;

2) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$;

3) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

Ответы:

1) $f(x)$ непрерывна на $(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$, $x=1$ – точка разрыва 1-ого рода (точка устранимого разрыва), $x=2$ – точка разрыва 2-ого рода;
2) $f(x)$ непрерывна на $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$, $x=2$ – точка разрыва 1-ого рода (точка устранимого разрыва);
3) $f(x)$ непрерывна на $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, $x=0$ – точка разрыва 1-ого рода (скачок).