Проверка устойчивости стандартных распределений

1. Случайные величины $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ независимы в совокупности и $\xi_k \sim \Pi(\lambda_k)$. Построить характеристическую функцию случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. Ответить на вопрос: является ли распределение Пуассона устойчивым?

Решение.

Для того, чтобы доказать или опровергнуть устойчивость распределения нужно проверить, что сумма независимых в совокупности случайных величин имеет то же распределение, что и каждая величина в отдельности. То есть характеристическая функция имеет нужный вид.

Сначала найдём характеристическую функцию случайной величины ξ, имеющей распределение Пуассона с параметром λ.

$$\psi_\xi(t) = M\left[e^{it\xi}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{e^{it}\lambda} = e^{\lambda \cdot (e^{it}-1)}.$$

Тогда характеристическая функция случайной величины η может быть вычислена как произведение характеристических функций величин $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$, то есть

$$\psi_\eta(t) = \psi_1(t) \cdot \psi_2(t) \cdot \dots \cdot \psi_n(t) = e^{\lambda_1 \cdot (e^{it}-1)} \cdot e^{\lambda_2 \cdot (e^{it}-1)} \cdot \dots \cdot e^{\lambda_n \cdot (e^{it}-1)} =$$
$$= e^{(e^{it}-1) \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)}$$

Пусть $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$, тогда получим $\psi_\eta(t) = e^{\lambda \cdot (e^{it}-1)}$, а значит $\eta \sim \Pi(\lambda)$. Таким образом, распределение Пуассона является устойчивым.

2. Случайные величины $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ независимы в совокупности и $\xi_k \sim E(\alpha)$. Построить характеристическую функцию случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. Ответить на вопрос: является ли показательное (экспоненциальное) распределение устойчивым?

Решение.

Аналогично предыдущей задаче найдём характеристическую функцию случайной величины ξ, имеющей показательное распределение с параметром α.

$$\psi_\xi(t) = M\left[e^{it\xi}\right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{itx}\alpha e^{-\alpha x}dx = \alpha \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} e^{x(it-\alpha)}dx =$$

$$= \alpha \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{e^{x(it-\alpha)}}{it-\alpha}\right)_0^b = \alpha\cdot\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{e^{b(it-\alpha)}}{it-\alpha} - \frac{1}{it-\alpha}\right] = \frac{\alpha}{\alpha - it}.$$

Тогда характеристическая функция случайной величины η может быть вычислена как произведение характеристических функций величин $\xi_1, \xi_2, \dots\ \xi_n$, то есть

$$\psi_\eta(t) = \psi_1(t)\cdot\psi_2(t)\cdot\ldots\cdot\psi_n(t) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - it}\cdot\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - it}\cdot\ldots\cdot\frac{\alpha_n}{\alpha_n - it}.$$

Функция данного вида не может быть сведена к функции вида $\frac{\alpha}{\alpha - it}$, поэтому показательное (экспоненциальное) распределение устойчивым не является.