Вычисление характеристической функции случайной величины

1. Найти характеристическую функцию дискретной случайной величины ξ, имеющей распределение Паскаля

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}, a > 0.$$

По этой функции найти $\boldsymbol{M\xi}$ и $\boldsymbol{D\xi}$.

Решение.

По определению характеристическая функция для дискретной случайной величины вычисляется по формуле

$$\psi_\xi(t) = M\left[e^{it\xi}\right] = \sum_k e^{itx_k} p_k.$$

Получим

$$\psi_\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(e^{it}a\right)^k}{(1+a)^{k+1}} =$$

$$= \frac{1}{1+a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{it}a}{1+a}\right)^k = \frac{1}{1+a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{e^{it}a}{1+a}} = \frac{1}{1+a-ae^{it}}.$$

Для того, чтобы найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, нужно найти первую и вторую производные полученной функции. Предлагаем проверить самостоятельно, что

$$\psi'_\xi(t) = \frac{aie^{it}}{(1+a-ae^{it})^2},$$

$$\psi''_\xi(t) = \frac{-ae^{it} - a^2e^{it} - a^2e^{2it}}{(1+a-ae^{it})^3}.$$

Тогда

$$M\xi = -i\psi'_\xi(0) = -i \cdot \frac{ai}{(1+a-a)^2} = a,$$

$$D\xi = \left(\psi'_\xi(0)\right)^2 - \psi''_\xi(0) = (ai)^2 - \frac{-a-a^2-a^2}{(1+a-a)^3} = -a^2 + a + 2a^2 = a^2 + a.$$

2. Найти характеристическую функцию непрерывной случайной величины, имеющей плотность распределения

$$f_\xi(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

Решение.

По определению характеристическая функция для непрерывной случайной величины вычисляется по формуле

$$\psi_\xi(t) = M\left[e^{it\xi}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx.$$

Получим

$$\psi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\frac{e^{-|x|}}{2}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{itx}\frac{e^{x}}{2}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{itx}\frac{e^{-x}}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{x(it+1)}dx + \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} e^{x(it-1)}dx$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{e^{x(it+1)}}{it+1}\right)_a^0 + \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{e^{x(it-1)}}{it-1}\right)_0^b$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{it+1} - \frac{e^{a(it+1)}}{it+1}\right] + \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{e^{b(it-1)}}{it-1} - \frac{1}{it-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{it+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{it-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{it-1-(it+1)}{(it+1)\cdot(it-1)} = -\frac{2}{2\cdot(-t^2-1)} =$$

$$= \frac{1}{1+t^2}.$$