Системы случайных величин

Если рассмотреть совместно две случайных величины ξ и η, то можно считать, что рассматривается *система случайных величин*.

Геометрически пара случайных величин ξ и η может быть представлена как случайная точка $M(x, y)$ на плоскости.

Законы распределения систем случайных величин

Системы случайных величин характеризуются множествами значений Ω_ξ и Ω_η и совместным законом распределения.

Определение 1. *Закон распределения* системы случайных величин – функция, которая ставит в соответствие любой паре значений случайных величин ξ и η вероятность её появления

$$P:\Omega_\xi \times \Omega_\eta \to [0, 1].$$

1. ***Матрица (таблица) распределения системы случайных величин***

Если случайные величины ξ и η дискретны, то систему можно задать таблицей (матрицей) распределения.

Определение 4.2. Пусть $\Omega_\xi = \{x_i \mid i = 1..m\}$, $\Omega_\eta = \{y_i \mid i = 1..n\}$, тогда матрица $M = (p_{ij})_{i=1,\, j=1}^{m,\ n}$, где $p_{ij} = P((\xi = x_i)\cdot(\eta = y_j))$ – *матрица распределения* системы случайных величин (ξ, η).

$\xi \setminus \eta$	y_1	y_2	…	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2n}
…	…	…	…	…
x_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}

Свойства матрицы распределения:

1. $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$, так как $\{(\xi = x_i)\cdot(\eta = y_j) \mid i = 1..m,\, j = 1..n\}$ – полная группа событий.

2. $P(\xi = x_i) = P\left(\bigcup_{j=1}^{n}(\xi = x_i)\cdot(\eta = y_j)\right) = \sum_{j=1}^{n} P\big((\xi = x_i)\cdot(\eta = y_j)\big) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$

– частный закон распределения величины ξ.

Аналогично $P(\eta = y_j) = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$ – частный закон распределения величины η.

Пример 1. Проверить, является ли следующая таблица матрицей распределения:

$\xi \setminus \eta$	**0**	**1**	**2**
0	0,10	0,30	0,20
1	0,06	0,18	0,16

а) Найти частные законы распределения.

б) Найти $\boldsymbol{P}(\xi < \eta)$.

Решение.

а)

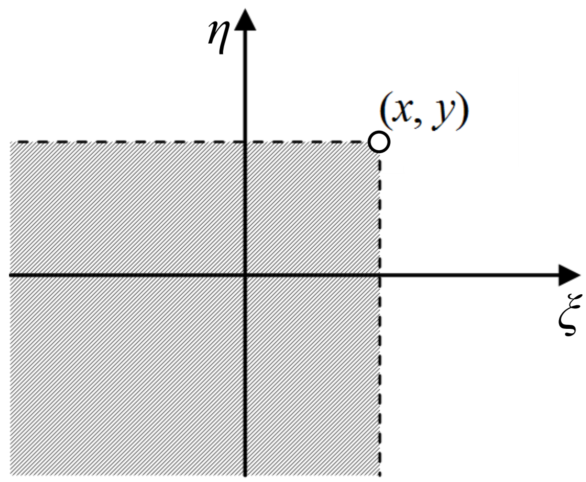
$\xi \setminus \eta$	**0**	**1**	**2**	$\boldsymbol{P}(\xi = x_i)$
0	0,10	0,30	0,20	*0,60*
1	0,06	0,18	0,16	*0,40*
$\boldsymbol{P}(\eta = y_i)$	*0,16*	*0,48*	*0,36*	1

б) $\boldsymbol{P}(\xi < \eta) = 0{,}30 + 0{,}20 + 0{,}16 = 0{,}66$.

2. *Функция распределения системы случайных величин*

Определение 3. *Совместной функцией распределения* системы случайных величин (ξ, η) называется функция $F(x,y) = P\big((\xi < x)\cdot(\eta < y)\big)$.

Геометрически $F(x, y)$ – вероятность попадания точки в бесконечный квадрант с вершиной в точке (x, y), лежащий левее и ниже её.



Пример 2. Система случайных величин (ξ, η) задана функцией распределения $F(x,y) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\,\frac{x}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\,\frac{y}{2}\right)$.

Найти $P\big((\xi < 3)\cdot(\eta < 0)\big)$.

Решение.

$$P\big((\xi<3)\cdot(\eta<0)\big)=F(3,0)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\,\frac{3}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\,\frac{0}{2}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}.$$

Свойства функции распределения:

1. $0\le F(x,y)\le 1$;

2. $F(-\infty,y)=0$, $F(x,-\infty)=0$

$F(-\infty,y)=P\big((\xi<-\infty)\cdot(\eta<y)\big)=P\big(\varnothing\cdot(\eta<y)\big)=P(\varnothing)=0$,

$F(x,-\infty)=P\big((\xi<x)\cdot(\eta<-\infty)\big)=P\big((\xi<x)\cdot\varnothing\big)=P(\varnothing)=0$;

3. $F(+\infty,y)=P\big((\xi<+\infty)\cdot(\eta<y)\big)=P\big(\Omega\cdot(\eta<y)\big)=P(\eta<y)=F_2(y)$ – частное распределение величины η,

$F(x,+\infty)=P\big((\xi<x)\cdot(\eta<+\infty)\big)=P\big((\xi<x)\cdot\Omega\big)=P(\xi<x)=F_1(x)$ – частное распределение величины ξ;

$F(+\infty,y)=F_\eta(y)$ $F(x,+\infty)=F_\xi(x)$

Пример 3. Функция распределения системы случайных величин (ξ,η) $F(x,y)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\,\frac{x}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\,\frac{y}{2}\right)$. Найти частные распределения компонент.

Решение.

$$F_\xi(x)=F_{\xi\eta}(x,+\infty)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\,\frac{x}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\left(\frac{+\infty}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\,\frac{x}{3}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\,\frac{x}{3}\right);$$

$$F_\eta(y)=F_{\xi\eta}(+\infty,y)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\left(\frac{+\infty}{2}\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\,\frac{y}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\,\frac{y}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\,\frac{y}{2}\right).$$

4. $F(x,y)$ – неубывающая по обоим аргументам.

Докажем, что $F(x,y)$ неубывающая по x, то есть $F(x_1,y)\le F(x_2,y)$, если $x_1<x_2$.

Доказательство. $F(x_1,y)=P\big((\xi<x_1)\cdot(\eta<y)\big)$,

$$F(x_2,y)=P\big((\xi<x_2)\cdot(\eta<y)\big)=P\big(((\xi<x_1)+(x_1\le\xi<x_2))\cdot(\eta<y)\big)=$$
$$=P\big((\xi<x_1)\cdot(\eta<y)+(x_1\le\xi<x_2)\cdot(\eta<y)\big)=P\big((\xi<x_1)\cdot(\eta<y)\big)+$$
$$+P\big((x_1\le\xi<x_2)\cdot(\eta<y)\big)=F(x_1,y)+\underbrace{P\big((x_1\le\xi<x_2)\cdot(\eta<y)\big)}_{\ge 0}\ge F(x_1,y).$$

Аналогично $F(x, y)$ неубывающая по y, то есть $F(x, y_1) \le F(x, y_2)$, если $y_1 < y_2$.

5. Вероятность попадания случайной точки с координатами (ξ, η) в прямоугольную область:

$$P\big((a \le \xi < b)\cdot(c \le \eta < d)\big) = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c).$$

Доказательство.

$$F(b,d) = P\big((\xi < b)\cdot(\eta < d)\big) = P\Big(\big((\xi < a) + (a \le \xi < b)\big)\cdot(\eta < d)\Big) =$$
$$= P\big((\xi < a)\cdot(\eta < d) + (a \le \xi < b)\cdot(\eta < d)\big) = P\big((\xi < a)\cdot(\eta < d)\big) + P\big((a \le \xi < b)\cdot(\eta < d)\big) =$$
$$= F(a,d) + P\big((a \le \xi < b)\cdot(\eta < d)\big) = F(a,d) + P\big((a \le \xi < b)\cdot((\eta < c) + (c \le \xi < d))\big) =$$
$$= F(a,d) + P\big((a \le \xi < b)\cdot(\eta < c) + (a \le \xi < b)\cdot(c \le \eta < d)\big) = F(a,d) + P\big((a \le \xi < b)\cdot(\eta < c)\big) +$$
$$+ P\big((a \le \xi < b)\cdot(c \le \eta < d)\big) = F(a,d) + F(b,c) - F(a,c) + P\big((a \le \xi < b)\cdot(c \le \eta < d)\big),$$ отсюда
$$P\big((a \le \xi < b)\cdot(c \le \eta < d)\big) = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c).$$

Пример 4. Функция распределения системы случайных величин (ξ, η)
$$F(x, y) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\,\frac{x}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\,\frac{y}{2}\right).$$

Найти $P\big((0 \le \xi < 3)\cdot(0 \le \eta < 2)\big)$.

Решение.

$$P\big((0 \le \xi < 3)\cdot(0 \le \eta < 2)\big) = F(3,2) - F(3,0) - F(0,2) + F(0,0) =$$
$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$$

Функция распределения может быть использована как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.

3. *Совместная плотность распределения системы случайных величин*

Определение 4. Система случайных величин (ξ, η) *непрерывна*, если её функция распределения $F(x, y)$ – непрерывна, дифференцируема по любому из аргументов и существует смешанная частная производная второго порядка $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$, отличная от нуля.

Определение 5. *Совместная плотность* распределения системы случайных величин (ξ, η) – плотность вероятности в окрестности точки (x, y). Она равна
$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

График двумерной плотности распределения – поверхность распределения $z = f(x, y)$.

Свойства двумерной плотности распределения:

1. $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy$;

2. $f(x,y)\geq 0$, т.к. $F(x,y)$ не убывает по x и y;

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$ – условие нормировки.

Пример 5. Если система двух случайных величин (ξ,η) равномерно распределена в области D, тогда $f(x,y)=\begin{cases} c, (x,y)\in D \\ 0, (x,y)\notin D \end{cases}$. Найти c.

Решение.

$$1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int\limits_{(x,y)\in D} cdxdy=cS(D) \Rightarrow c=\frac{1}{S(D)}.$$

4. $P\big((\xi,\eta)\in[x,x+\Delta x)\times[y,y+\Delta y)\big)=\big(F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)\big)-$
$-\big(F(x,y+\Delta y)-F(x,y)\big)\approx\Delta y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\big(F(x+\Delta x,y)\big)-\Delta y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\big(F(x,y)\big)=$
$=\Delta y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\big(F(x+\Delta x,y)-F(x,y)\big)\approx\Delta y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta x\cdot\frac{\partial}{\partial x}F(x+\Delta x,y)\right)=\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=$
$=\Delta x\Delta y f(x,y)$ – элемент вероятности.

5. Вероятность попадания случайной точки в область D. Рассмотрим малую окрестность точки (x,y) – $dS(D)_{(x,y)}$, тогда $P(x\in D)=\sum\limits_{(x,y)\in D}\big(dS(D)_{(x,y)}\cdot f(x,y)\big)$ => $P\big((x,y)\in D\big)=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$.

6. Частные распределения. Пусть $f_{\xi\eta}(x,y)$ – совместная плотность распределения двумерной случайной величины (ξ,η), тогда частная плотность распределения величины ξ будет равна

$$f_\xi(x)=F'_\xi(x)=\big(F(x,+\infty)\big)'_x=\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy\right)'_x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy,$$

а частная плотность распределения величины η равна $f_\eta(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$.

Независимость случайных величин

Определение 6. Случайные величины ξ и η независимы, если $\forall a, b, c, d$ события $(a\leq\xi<b)$ и $(c\leq\eta<d)$ независимы.

Определение 7. Случайные величины ξ и η независимы, если $F(x,y)=F_\xi(x)\cdot F_\eta(y)$.

<u>Утверждение 1</u>. Определения 4.6 и 4.7 эквивалентны.

Доказательство.

Для непрерывных случайных величин $f(x,y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$, а для дискретных – $p_{ij} = p_{i\xi} \cdot p_{j\eta}$.

Условные законы распределения

В случае зависимых случайных величин нельзя напрямую осуществить переход от двух одномерных законов к совместному закону распределения. Для этого необходимо знать *условные законы распределения*.

Определение 8. *Условный ряд распределения* величины ξ – ряд распределения случайной величины ξ при условии, что случайная величина η приняла заданное значение.

$$\mathbf{P}\left(\xi = x_i \mid \eta = y_j\right) = \frac{\mathbf{P}\left((\xi = x_i)(\eta = y_j)\right)}{\mathbf{P}\left(\eta = y_j\right)} = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_{ij}}.$$

Для непрерывных случайных величин зададим $F_\xi\left(x \mid y_0 \le \eta < y_0 + \Delta y\right) = \mathbf{P}\left(\xi < x \mid y_0 \le \eta < y_0 + \Delta y\right)$.

Определение 9. *Условной функцией распределения* случайной величины ξ при условии, что случайная величина η приняла значение y_0, называется функция $F_\xi\left(x \mid \eta = y_0\right) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} F_\xi\left(x \mid y_0 \le \eta < y_0 + \Delta y\right)$.

Подставив формулы для вычисления вероятностей, получим $F_\xi\left(x \mid \eta = y_0\right) = \dfrac{\int_{-\infty}^{x} f\left(t, y_0\right) dt}{f_\eta\left(y_0\right)}$, тогда $f_\xi\left(x \mid \eta = y_0\right) = \dfrac{f\left(x, y_0\right)}{f_\eta\left(y_0\right)}$.

Аналогично $f_\eta\left(y \mid \xi = x_0\right) = \dfrac{f\left(x_0, y\right)}{f_\xi\left(x_0\right)}$.

Определение 10. $f_\xi\left(x \mid \eta = y_0\right) = \dfrac{f\left(x, y_0\right)}{f_\eta\left(y_0\right)}$ и $f_\eta\left(y \mid \xi = x_0\right) = \dfrac{f\left(x_0, y\right)}{f_\xi\left(x_0\right)}$ - *условные плотности распределения*.

Определение 11. *Условное математическое ожидание* величины ξ – функция параметра y_0. Оно показывает зависимость среднего значения величины ξ от значения случайной величины η – регрессию ξ на η.

График этой функции – *кривая регрессии*.

Замечание. Если случайные величины не коррелированы, то кривые регрессии ξ на η и η на ξ являются прямыми, параллельными осям координат.

Ковариация и коэффициент корреляции

Определение 12. *Ковариация* – мера линейной зависимости двух случайных величин.

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathrm{M}[(\xi - \mathrm{M}\xi)\cdot(\eta - \mathrm{M}\eta)].$$

Свойства ковариации:

1. $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathrm{cov}(\eta, \xi)$

2. Если случайные величины ξ и η независимы, то $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$. Обратное неверно.

3. $|\mathrm{cov}(\xi, \eta)| \le \sigma_\xi \cdot \sigma_\eta$;

4. $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathrm{M}[\xi \cdot \eta] - \mathrm{M}\xi \cdot \mathrm{M}\eta$.

Замечание. Нельзя сравнивать тесноту линейной связи у двух разных пар случайных величин, так как зависит от величины дисперсий.

Определение 13. *Коэффициент корреляции* – нормированная ковариация $r_{\xi\eta} = \dfrac{\mathrm{cov}(\xi, \eta)}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta}$.

Пример 6. Система дискретных случайных величин задана своей матрицей распределения

$\xi \setminus \eta$	**0**	**1**	**2**
0	0,10	0,30	0,20
1	0,06	0,18	0,16

Найти ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η.

Свойства коэффициента корреляции:

1. $|r_{\xi\eta}| \le 1$;

2. $|r_{\xi\eta}| = 1 \Leftrightarrow \exists\ a \ne 0, b: \eta = a\xi + b$;

3. Если случайные величины ξ и η независимы, то $r_{\xi\eta} = 0$.

В случае системы из n случайных величин вводится *корреляционная матрица*

$$K = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}.$$

Литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2000.

2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1999.

3. Мхитарян, В. С. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / В. С. Мхитарян, В. Ф. Шишов, А. Ю. Козлов. – М.: Академия, 2012.

4. Тарасов, Л. В. Мир, построенный на вероятности / Л. В. Тарасов. – М.: Просвещение, 1984.

5. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и её приложения / В. Феллер. – М.: Мир, 1984.