

Задача для самостоятельного решения

Задача. На заводе стоит 4 станка, выпускающих одинаковые изделия. Вероятности выпуска x_j тыс. изделий в день на i станке равна p_{ij} . Требуется найти:

- а) распределения величин X и Y (безусловные законы);
- б) среднее количество изделий, выпускаемых на заводе;
- в) дисперсию и среднеквадратичное отклонение числа изделий, выпускаемых на заводе;
- г) распределение числа изделий, выпускаемых третьим станком;
- д) среднее число изделий, выпускаемых третьим станком;
- е) дисперсию и среднеквадратичное отклонение числа изделий, выпускаемых третьим станком;
- ж) ковариацию и коэффициент корреляции. Будут ли независимы случайные величины X и Y ?

$Y \setminus X$		Количество выпускаемых изделий, тыс шт/день					
		2	3	5	7	9	11
Номер станка	1	0,012	0,024	0,030	0,030	0,018	0,006
	2	0,036	0,072	0,090	0,010	0,054	0,018
	3	0,020	0,040	0,050	0,050	0,030	0,090
	4	0,032	0,064	0,080	0,080	0,048	0,016

Решение.

- а) Найдем распределения величин X и Y (безусловные законы).

$Y \setminus X$		Количество выпускаемых изделий, тыс шт/день						p_y
		2	3	5	7	9	11	
Номер станка	1	0,012	0,024	0,03	0,03	0,018	0,006	0,12
	2	0,036	0,072	0,09	0,01	0,054	0,018	0,28
	3	0,02	0,04	0,05	0,05	0,03	0,09	0,28
	4	0,032	0,064	0,08	0,08	0,048	0,016	0,32
p_x		0,1	0,2	0,25	0,17	0,15	0,13	

Распределение по X :

изделия, x	2	3	5	7	9	11
p_x	0,1	0,2	0,25	0,17	0,15	0,13

Распределение по Y :

станок, Y	1	2	3	4
p_y	0,12	0,28	0,28	0,32

б) Найдем среднее количество изделий, выпускаемых на заводе (6,02).

J11 $=C10*C11+D10*D11+E10*E11+F10*F11+G10*G11+H10*H11$

$Y \setminus X$		Количество выпускаемых изделий, тыс шт/день						
		2	3	5	7	9	11	p_y
Номер станка	1	0,012	0,024	0,03	0,03	0,018	0,006	0,12
	2	0,036	0,072	0,09	0,01	0,054	0,018	0,28
	3	0,02	0,04	0,05	0,05	0,03	0,09	0,28
	4	0,032	0,064	0,08	0,08	0,048	0,016	0,32
	p_x	0,1	0,2	0,25	0,17	0,15	0,13	
	изделия, X	2	3	5	7	9	11	
	p_x	0,1	0,2	0,25	0,17	0,15	0,13	$M(X)$ 6,02
	станок, Y	1	2	3	4			
	p_y	0,12	0,28	0,28	0,32			

в) Найдем дисперсию и среднее квадратичное отклонение числа изделий, выпускаемых на заводе (8,4196 и 2,9016547 соответственно).

J12 $=C10^2*C11+D10^2*D11+E10^2*E11+F10^2*F11+G10^2*G11+H10^2*H11$

$Y \setminus X$		Количество выпускаемых изделий, тыс шт/день						
		2	3	5	7	9	11	p_y
Номер станка	1	0,012	0,024	0,03	0,03	0,018	0,006	0,12
	2	0,036	0,072	0,09	0,01	0,054	0,018	0,28
	3	0,02	0,04	0,05	0,05	0,03	0,09	0,28
	4	0,032	0,064	0,08	0,08	0,048	0,016	0,32
	p_x	0,1	0,2	0,25	0,17	0,15	0,13	
	изделия, X	2	3	5	7	9	11	
	p_x	0,1	0,2	0,25	0,17	0,15	0,13	$M(X)$ 6,02
								$M^2(X)$ 44,66
	станок, Y	1	2	3	4			
	p_y	0,12	0,28	0,28	0,32			

J13 $=J12-J11^2$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
10		изделия, X	2	3	5	7	9	11		
11		p_x	0,1	0,2	0,25	0,17	0,15	0,13	M(X)	6,02
12									M ² (X)	44,66
13		станок, Y	1	2	3	4			D(X)	8,4196
14		p_y	0,12	0,28	0,28	0,32				

J14 $=КОРЕНЬ(J13)$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
10		изделия, X	2	3	5	7	9	11		
11		p_x	0,1	0,2	0,25	0,17	0,15	0,13	M(X)	6,02
12									M ² (X)	44,66
13		станок, Y	1	2	3	4			D(X)	8,4196
14		p_y	0,12	0,28	0,28	0,32			$\sigma(X)$	2,901655

г) Найдем распределение числа изделий, выпускаемых третьим станком. Найдем условный закон распределения случайной величины X при Y = 3 по формуле: $P(X_i | Y = 3) = \frac{P(X_i, Y = 3)}{P(Y = 3)}$.

J3 $=C5/15$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Y \ X	Количество выпускаемых изделий, тыс шт/день							условный закон
2			2	3	5	7	9	11	p_y	
3	Номер станка	1	0,012	0,024	0,03	0,03	0,018	0,006	0,12	0,071
4		2	0,036	0,072	0,09	0,01	0,054	0,018	0,28	0,143
5		3	0,02	0,04	0,05	0,05	0,03	0,09	0,28	0,179
6		4	0,032	0,064	0,08	0,08	0,048	0,016	0,32	0,179
7		p_x	0,1	0,2	0,25	0,17	0,15	0,13		0,107
8										0,321
9										1,000

Распределение числа изделий, выпускаемых третьим станком:

X, Y=3	2	3	5	7	9	11
p_x	0,071	0,143	0,179	0,179	0,107	0,321

д) Найдем среднее число изделий, выпускаемых третьим станком (7,213 ≈ 7).

D20		=C17*C18+D17*D18+E17*E18+F17*F18+G17*G18+H17*H18						
A	B	C	D	E	F	G	H	I
16								
17		X, Y=3	2	3	5	7	9	11
18		p_X	0,071	0,143	0,179	0,179	0,107	0,321
19								
20		$M(X Y=3)$	7,213					

е) Найдем дисперсию и среднее квадратичное отклонение числа изделий, выпускаемых третьим станком (8,4196 и 2,9016547 соответственно).

G20		=C17^2*C18+D17^2*D18+E17^2*E18+F17^2*F18+G17^2*G18+H17^2*H18								
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
16										
17		X, Y=3	2	3	5	7	9	11		
18		p_X	0,071	0,143	0,179	0,179	0,107	0,321		
19										
20		$M(X Y=3)$	7,213		$M^2(X Y=3)$	62,325				

D21		=G20-D20^2						
A	B	C	D	E	F	G	H	
16								
17		X, Y=3	2	3	5	7	9	11
18		p_X	0,071	0,143	0,179	0,179	0,107	0,321
19								
20		$M(X Y=3)$	7,213		$M^2(X Y=3)$	62,325		
21		$D(X Y=3)$	10,29763					

G21		=КОРЕНЬ(D21)				
A	B	C	D	E	F	G
21		$D(X Y=3)$	10,29763		$\sigma(X Y=3)$	3,209

ж) Найдем ковариацию и коэффициент корреляции (0,168 и 0,056774 соответственно).

Formula bar: $=C24*C25*B25+D24*D25*B25+E24*E25*B25+F24*F25*B25+G24*G25*B25+H24*H25*B25$

Y \ X		Количество выпускаемых изделий, тыс шт/день						$x_i y_j p_{ij}$
		2	3	5	7	9	11	
Номер станка	1	0,012	0,024	0,03	0,03	0,018	0,006	0,684
	2	0,036	0,072	0,09	0,01	0,054	0,018	2,984
	3	0,02	0,04	0,05	0,05	0,03	0,09	6,06
	4	0,032	0,064	0,08	0,08	0,048	0,016	7,296
							$M(XY)=$	17,024

Formula bar: $=I29-H13*J11$

изделия, X		2	3	5	7	9	11		
p_x		0,1	0,2	0,25	0,17	0,15	0,13	$M(X)$	6,02
								$M^2(X)$	44,66
станок, Y		1	2	3	4	$M(Y)=$ 2,8		$D(X)$	8,4196
p_y		0,12	0,28	0,28	0,32	$M^2(Y)=$ 8,88		$\sigma(X)$	2,9016547
								$D(Y)=$ 1,04	
								$\sigma(Y)=$ 1,019804	
$X, Y=3$		2	3	5	7	9	11		
p_x		0,071	0,143	0,179	0,179	0,107	0,321		
		$M(X Y=3)$ 7,213		$M^2(X Y=3)$ 62,325					
		$D(X Y=3)$ 10,29763		$\sigma(X Y=3)$ 3,209					
Y \ X		Количество выпускаемых изделий, тыс шт/день						$x_i y_j p_{ij}$	
		2	3	5	7	9	11		
Номер станка	1	0,012	0,024	0,03	0,03	0,018	0,006	0,684	
	2	0,036	0,072	0,09	0,01	0,054	0,018	2,984	
	3	0,02	0,04	0,05	0,05	0,03	0,09	6,06	
	4	0,032	0,064	0,08	0,08	0,048	0,016	7,296	
							$M(XY)=$	17,024	
							$cov(X; Y)$	0,168	

I33										
=I31/(J14*N16)										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
10		изделия, X	2	3	5	7	9	11		
11		p_X	0,1	0,2	0,25	0,17	0,15	0,13	$M(X)$	6,02
12									$M^2(X)$	44,66
13		станок, Y	1	2	3	4			$M(Y)=$	2,8
14		p_Y	0,12	0,28	0,28	0,32			$M^2(Y)=$	8,88
15									$D(Y)=$	1,04
16									$\sigma(Y)=$	1,019804
17		X, Y=3	2	3	5	7	9	11		
18		p_X	0,071	0,143	0,179	0,179	0,107	0,321		
19										
20		$M(X Y=3)$		7,213		$M^2(X Y=3)$		62,325		
21		$D(X Y=3)$		10,29763		$\sigma(X Y=3)$		3,209		
22										
23	$Y \setminus X$		Количество выпускаемых изделий, тыс шт/день					$X_i Y_j P_{ij}$		
24			2	3	5	7	9	11		
25	Номер станка	1	0,012	0,024	0,03	0,03	0,018	0,006	0,684	
26		2	0,036	0,072	0,09	0,01	0,054	0,018	2,984	
27		3	0,02	0,04	0,05	0,05	0,03	0,09	6,06	
28		4	0,032	0,064	0,08	0,08	0,048	0,016	7,296	
29								$M(XY)=$	17,024	
30										
31								$cov(X; Y)$	0,168	
32										
33								$r_{XY}=$	0,056774	

Коэффициент корреляции имеет значение 0,056774, что очень близко к 0, поэтому можем утверждать, что связь случайная, и случайные величины X и Y будут независимы.