Лабораторная работа.
Двумерные дискретные случайные величины

Цель – научить применять MS Excel для решения задач с двумерными случайными величинами.

Пример. Закон распределения системы дискретных случайных величин (X, Y) задан таблицей

Y	***X***			
	–2	–1	0	1
–1	1/16	2/16	3/16	1/16
0	2/16	3/16	1/16	0
1	0	1/16	0	2/16

Найти:

а) частные (безусловные) законы распределения компонент;

б) условный закон распределения случайной величины Y при $X = 0$;

в) условный закон распределения случайной величины Y при $X = –1$;

г) условный закон распределения случайной величины X при $Y = 0$;

д) $M(Y \mid X = -1)$, $M(X \mid Y = 0)$;

е) математические ожидания случайных величин X и Y;

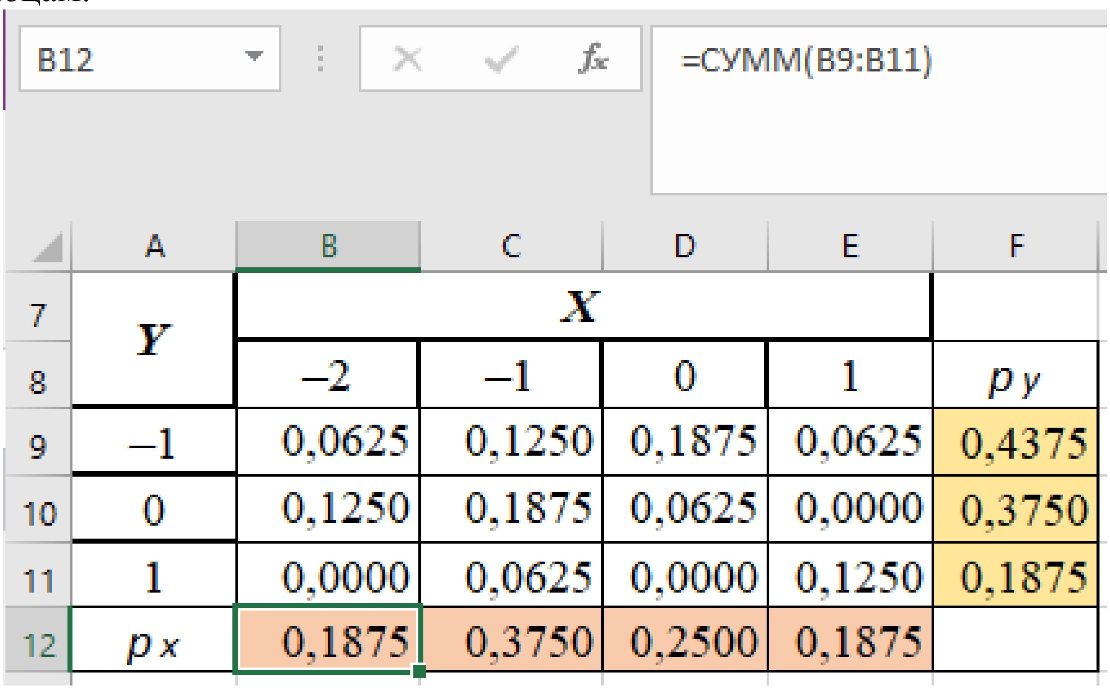
ж) дисперсии и среднеквадратические отклонения случайных величин X и Y;

з) корреляционный момент и коэффициент корреляции.

и) вероятность того, что система случайных величин X и Y будет принадлежать области $|x| + |y| \le 1$.

Решение.

а) Заполним таблицу полностью, суммируя вероятности по строкам и столбцам:



	A	B	C	D	E	F
7	***Y***	***X***				
8		–2	–1	0	1	*p y*
9	–1	0,0625	0,1250	0,1875	0,0625	0,4375
10	0	0,1250	0,1875	0,0625	0,0000	0,3750
11	1	0,0000	0,0625	0,0000	0,1250	0,1875
12	*p x*	0,1875	0,3750	0,2500	0,1875	

Тогда получим частные (безусловные) законы распределения:

X	-2	-1	0	1
p_X	0,1875	0,3750	0,2500	0,1875

Y	-1	0	1
p_Y	0,4375	0,3750	0,1875

б) Найдем условный закон распределения случайной величины Y при $X = 0$ по формуле: $P(Y_i \mid X=0) = \dfrac{P(Y_i,\, X=0)}{P(X=0)}$.

Y	X					условный закон
	–2	–1	0	1	p_Y	$Y(X=0)$
–1	0,0625	0,1250	0,1875	0,0625	0,4375	0,75
0	0,1250	0,1875	0,0625	0	0,3750	0,25
1	0	0,0625	0	0,1250	0,1875	0
p_X	0,1875	0,3750	0,2500	0,1875		

$Y \mid X=0$	-1	0	1
p_Y	0,75	0,25	0

в) Найдем условный закон распределения случайной величины Y при $X = -1$ по формуле: $P(Y_i \mid X=-1) = \dfrac{P(Y_i,\, X=-1)}{P(X=-1)}$.

Y	X				
	–2	–1	0	1	p_Y
–1	0,0625	0,1250	0,1875	0,0625	0,4375
0	0,1250	0,1875	0,0625	0	0,3750
1	0	0,0625	0	0,1250	0,1875
p_X	0,1875	0,3750	0,2500	0,1875	

H10 | =C10/C12

	A	B	C	D	E	F	G	H
7	***Y***	***X***					условный закон	условный закон
8		–2	–1	0	1	p_y	$Y(X=0)$	$Y(X=-1)$
9	–1	0,0625	0,1250	0,1875	0,0625	0,4375	0,75	0,6667
10	0	0,1250	0,1875	0,0625	0	0,3750	0,25	0,5
11	1	0	0,0625	0	0,1250	0,1875	0	0,1667
12	p_x	0,1875	0,3750	0,2500	0,1875			

$Y \mid X$=-1	-1	0	1
p_y	0,6667	0,5	0,1667

г) Найдем условный закон распределения случайной величины X при $Y = 0$ по формуле: $P(X_i \mid Y=0)=\dfrac{P(X_i, Y=0)}{P(Y=0)}$.

I10 | =C10/F10

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
7	***Y***	***X***					условный закон	условный закон	условный закон
8		–2	–1	0	1	p_y	$Y(X=0)$	$Y(X=-1)$	$X(Y=0)$
9	–1	0,0625	0,1250	0,1875	0,0625	0,4375	0,75	0,6667	0,3333
10	0	0,1250	0,1875	0,0625	0	0,3750	0,25	0,5	0,5
11	1	0	0,0625	0	0,1250	0,1875	0	0,1667	0,1667
12	p_x	0,1875	0,3750	0,2500	0,1875				0

$X \mid Y$ =0	-2	-1	0	1
p_X	0,3333	0,5	0,1667	0

д) Найдем условное математическое ожидание $M(Y \mid X=-1)$.

$$M\left(Y \mid X=-1\right)=\sum Y_i \cdot \frac{P(Y_i \mid X=-1)}{P(X=-1)}=-1\cdot\frac{0{,}1250}{0{,}3750}+0\cdot\frac{0{,}1875}{0{,}3750}+1\cdot\frac{0{,}0625}{0{,}375}=-0{,}1667$$

Найдем условное математическое ожидание $M(X \mid Y=0)$.

$$M\left(X\,|\,Y=0\right)=\sum X_i\cdot\frac{P(X_i\,|\,Y=0)}{P(Y=0)}=-2\cdot\frac{0{,}1250}{0{,}3750}+(-1)\cdot\frac{0{,}1875}{0{,}3750}+0+1\cdot\frac{0}{0{,}375}=-1{,}1667$$

е) Найдем математическое ожидание $M\,(X)=\sum Xi\;pi$ =-0,5625.

G2 | f_x =B1*B2+C1*C2+D1*D2+E1*E2

	A	B	C	D	E	F	G
1	X	-2	-1	0	1		
2	px	0,1875	0,375	0,25	0,1875	M(X)	-0,5625

Найдем математическое ожидание $M\,(Y)=\sum Yi\;pi$ =-0,25.

F5 | f_x =B4*B5+C4*C5+D4*D5

	A	B	C	D	E	F	G
1	X	-2	-1	0	1		
2	px	0,1875	0,375	0,25	0,1875	M(X)	-0,5625
3							
4	Y	-1	0	1			
5	py	0,4375	0,375	0,1875	M(Y)	-0,25	

ж) Найдем дисперсии и среднеквадратические отклонения случайных величин X и Y

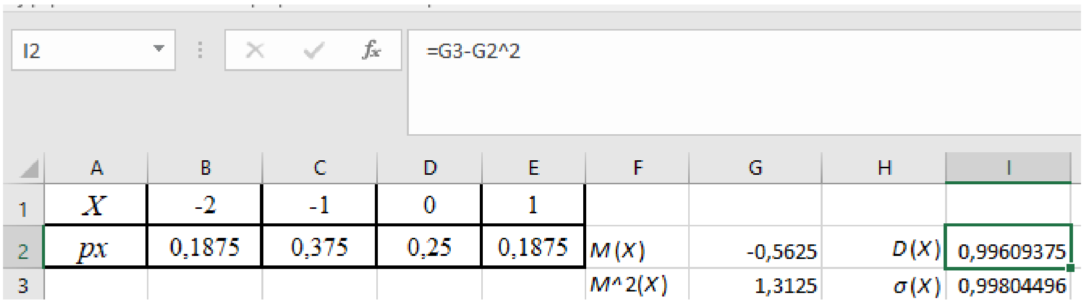
$M^2(X)=\sum Xi\;pi$ = 1,3125;

$D(X) = M^2(X) - (M(X))^2 = 1{,}3125 - (-0{,}5625)^2 = 0{,}99609375$;

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}99804496$.

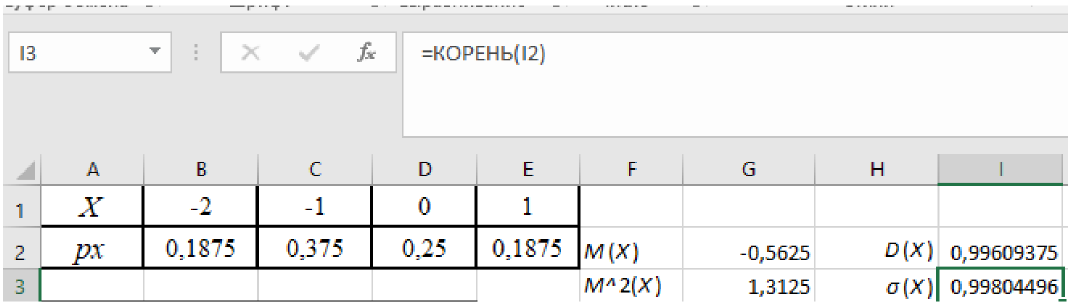
G3 | f_x =B1^2*B2+C1^2*C2+D1^2*D2+E1^2*E2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	X	-2	-1	0	1				
2	px	0,1875	0,375	0,25	0,1875	M(X)	-0,5625	D(X)	0,99609375
3						M^2(X)	1,3125	σ(X)	0,99804496



I2 =G3-G2^2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	X	-2	-1	0	1				
2	px	0,1875	0,375	0,25	0,1875	M(X)	-0,5625	D(X)	0,99609375
3						M^2(X)	1,3125	σ(X)	0,99804496



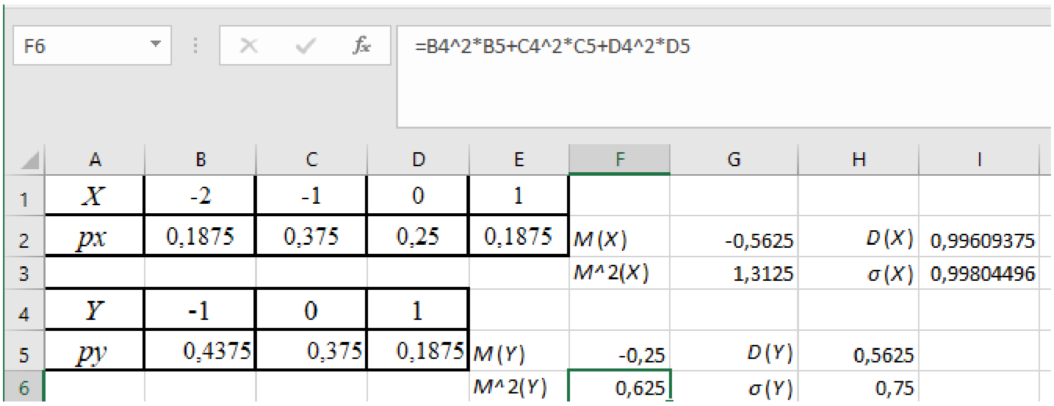
I3 =КОРЕНЬ(I2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	X	-2	-1	0	1				
2	px	0,1875	0,375	0,25	0,1875	M(X)	-0,5625	D(X)	0,99609375
3						M^2(X)	1,3125	σ(X)	0,99804496

$M^2(Y) = \sum Yi\ pi = 0{,}625$;

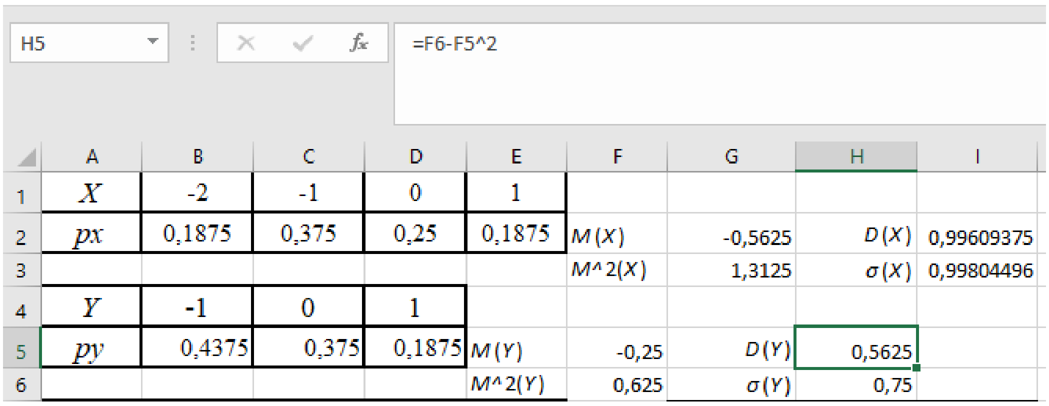
$D(Y) = M^2(Y) - (M(Y))^2 = 0{,}625 - (-0{,}25)^2 = 0{,}5625$;

$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = 0{,}75$



F6 =B4^2*B5+C4^2*C5+D4^2*D5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	X	-2	-1	0	1				
2	px	0,1875	0,375	0,25	0,1875	M(X)	-0,5625	D(X)	0,99609375
3						M^2(X)	1,3125	σ(X)	0,99804496
4	Y	-1	0	1					
5	py	0,4375	0,375	0,1875	M(Y)	-0,25	D(Y)	0,5625	
6					M^2(Y)	0,625	σ(Y)	0,75	



H5 =F6-F5^2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	X	-2	-1	0	1				
2	px	0,1875	0,375	0,25	0,1875	M(X)	-0,5625	D(X)	0,99609375
3						M^2(X)	1,3125	σ(X)	0,99804496
4	Y	-1	0	1					
5	py	0,4375	0,375	0,1875	M(Y)	-0,25	D(Y)	0,5625	
6					M^2(Y)	0,625	σ(Y)	0,75	

H6 | =КОРЕНЬ(H5)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	X	-2	-1	0	1				
2	px	0,1875	0,375	0,25	0,1875	$M(X)$	-0,5625	$D(X)$	0,99609375
3						$M^2(X)$	1,3125	$\sigma(X)$	0,99804496
4	Y	-1	0	1					
5	py	0,4375	0,375	0,1875	$M(Y)$	-0,25	$D(Y)$	0,5625	
6					$M^2(Y)$	0,625	$\sigma(Y)$	0,75	

з) Найдем $M(XY) = \sum p_{ij} x_i y_j = 0,25.$

F16 | =B15*B16*A16+C15*C16*A16+D15*D16*A16+E15*E16*A16

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
14	**Y**	**X**				XiYjPij			
15		-2	-1	0	1				
16	-1	0,0625	0,1250	0,1875	0,0625	0,1875			
17	0	0,1250	0,1875	0,0625	0	0			
18	1	0	0,0625	0	0,1250	0,0625			
19						0,25			

Найдем корреляционный момент:

$\operatorname{cov}(X;Y) = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y)$ = 0,25 − -0,5625·-0,25 = 0,109375.

E21 | =F19-G2*F5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	X	-2	-1	0	1				
2	px	0,1875	0,375	0,25	0,1875	$M(X)$	-0,5625	$D(X)$	0,99609375
3						$M^2(X)$	1,3125	$\sigma(X)$	0,99804496
4	Y	-1	0	1					
5	py	0,4375	0,375	0,1875	$M(Y)$	-0,25	$D(Y)$	0,5625	
6					$M^2(Y)$	0,625	$\sigma(Y)$	0,75	
7	**Y**	**X**					условный закон	условный закон	условный закон
8		−2	−1	0	1	p_y	$Y(X=0)$	$Y(X=-1)$	$X(Y=0)$
9	−1	0,0625	0,1250	0,1875	0,0625	0,4375	0,75	0,6667	0,3333
10	0	0,1250	0,1875	0,0625	0	0,3750	0,25	0,5	0,5
11	1	0	0,0625	0	0,1250	0,1875	0	0,1667	0,1667
12	p_x	0,1875	0,3750	0,2500	0,1875				0
13									
14	**Y**	**X**				XiYjPij			
15		-2	-1	0	1				
16	-1	0,0625	0,1250	0,1875	0,0625	0,1875			
17	0	0,1250	0,1875	0,0625	0	0			
18	1	0	0,0625	0	0,1250	0,0625			
19						0,25			
20									
21				cov(X; Y)	0,109375				
22									

Найдем коэффициент корреляции:

$$r_{XY} = \frac{cov(X;Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)} = \frac{0{,}109375}{0{,}99804496\cdot 0{,}75} = 0{,}146119.$$

Связь между случайными величинами X и Y слабая и прямая.

H21 =E21/(I3*H6)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	X	-2	-1	0	1				
2	px	0,1875	0,375	0,25	0,1875	$M(X)$	-0,5625	$D(X)$	0,99609375
3						$M^2(X)$	1,3125	$\sigma(X)$	0,99804496
4	Y	-1	0	1					
5	py	0,4375	0,375	0,1875	$M(Y)$	-0,25	$D(Y)$	0,5625	
6					$M^2(Y)$	0,625	$\sigma(Y)$	0,75	
7	Y	X					условный закон	условный закон	условный закон
8		–2	–1	0	1	p_y	$Y(X=0)$	$Y(X=-1)$	$X(Y=0)$
9	–1	0,0625	0,1250	0,1875	0,0625	0,4375	0,75	0,6667	0,3333
10	0	0,1250	0,1875	0,0625	0	0,3750	0,25	0,5	0,5
11	1	0	0,0625	0	0,1250	0,1875	0	0,1667	0,1667
12	p_x	0,1875	0,3750	0,2500	0,1875				0
13									
14	Y	X				$XiYjPij$			
15		-2	-1	0	1				
16	-1	0,0625	0,1250	0,1875	0,0625	0,1875			
17	0	0,1250	0,1875	0,0625	0	0			
18	1	0	0,0625	0	0,1250	0,0625			
19						0,25			
20									
21				cov(X; Y)	0,109375		r_{XY}	0,146119	

и) Найдем вероятность того, что система случайных величин X и Y будет принадлежать области $|x|+|y|\le 1$. Для этого выделим иным цветом в таблице «благоприятные» значения X и Y, для которых выполняется условие $|x|+|y|\le 1$. Получаем: $P(|x|+|y|\le 1) = 0{,}1875 + 0{,}1875 + 0{,}625 + 0 + 0 = 0{,}4375$.

E30 =E26+E27+D27+F27+E28

	A	B	C	D	E	F	G
24		Y	X				
25			–2	–1	0	1	
26		–1	0,0625	0,1250	0,1875	0,0625	
27		0	0,1250	0,1875	0,0625	0	
28		1	0	0,0625	0	0,1250	
29							
30				Сумма	0,4375		

Задача для самостоятельного решения

Задача. На заводе стоит 4 станка, выпускающих одинаковые изделия. Вероятности выпуска x_j тыс. изделий в день на i станке равна p_{ij}. Требуется найти:

а) распределения величин X и Y (безусловные законы);

б) среднее количество изделий, выпускаемых на заводе;

в) дисперсию и среднеквадратичное отклонение числа изделий, выпускаемых на заводе;

г) распределение числа изделий, выпускаемых третьим станком;

д) среднее число изделий, выпускаемых третьим станком;

е) дисперсию и среднеквадратичное отклонение числа изделий, выпускаемых третьим станком;

ж) ковариацию и коэффициент корреляции. Будут ли независимы случайные величины X и Y?

$Y \setminus X$		Количество выпускаемых изделий, тыс шт/день					
		2	3	5	7	9	11
Номер станка	1	0,012	0,024	0,030	0,030	0,018	0,006
	2	0,036	0,072	0,090	0,010	0,054	0,018
	3	0,020	0,040	0,050	0,050	0,030	0,090
	4	0,032	0,064	0,080	0,080	0,048	0,016