Непрерывные случайные величины

Содержание

Непрерывная случайная величина

Таким величинам, как размеры физических тел, температура, давление и другие, неестественно приписывать дискретное множество возможных значений. Естественно считать, что они могут принимать всевозможные значения в определённом интервале.

Ранее мы уже давали определение непрерывной случайной величины, из которого следует, что она может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного интервала.

Функция $f(x)$, *определённая на множестве* X, *называется* ***непрерывной в точке*** x, *если*:

- точка x принадлежит области определения функции $f(x)$;
- при стремлении к нулю приращения аргумента Δx приращение функции Δf также стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x \to 0}[f(x+\Delta x) - f(x)] = 0.$$

Иначе говоря, функция называется непрерывной, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Функция называется ***непрерывной на интервале***, *если условие непрерывности выполняется в каждой точке этого интервала*.

Функция распределения

В отличие от дискретной, для непрерывной случайной величины невозможно перечислить (определить) все её значения и соответствующие им вероятности даже на интервале (0; 1). Её можно, таким образом, сравнивать уже не со множеством натуральных, как дискретную случайную величину, а со множеством действительных чисел, которые целиком заполняют некоторый конечный или бесконечный интервал.

В дальнейшем будем полагать, что при каждом испытании непрерывная случайная величина X может принять одно и только одно значение из некоторого конечного или бесконечного интервала (a; b).

Для характеристики непрерывной случайной величины практически невозможно пользоваться вероятностью в том смысле, который мы вкладывали в это понятие при определении дискретной случайной величины, то есть вероятностью того, что случайная величина X примет конкретное значение $X=x$. Поэтому, в данном случае, вероятность определяется как вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше некоторого x, то есть вероятностью события ($X<x$).

Графически это можно представить таким образом:

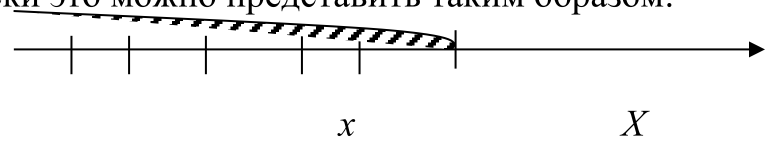

Рис. 1

Непрерывную случайную величину характеризует *функция распределения*.

Функцией распределения *случайной величины X называется функция $F(x)$ в точке x, равная вероятности того, что случайная величина X приняла своё значение, меньшее x:*

$$F(x)=P(X<x), \qquad (1)$$

то есть что наблюдаемое значение принадлежит интервалу ($-\infty$; x).

Областью определения $F(x)$ в зависимости от значения x может быть вся действительная ось ($-\infty<x<+\infty$). (Иногда равенство (1) называют ***интегральным законом***, или *интегральной функцией распределения*).

Если значения случайной величины X рассматривать как точки на числовой оси OX, то равенство $F(x)=P(X<x)$ можно истолковать как оценку вероятности события, заключающегося в том, что в результате опыта значение $X=x_i$ на числовой оси будет лежать левее некоторого x (рис. 2.)

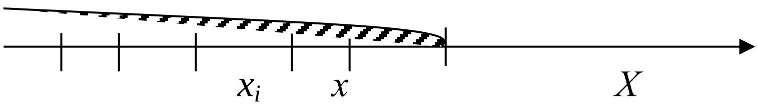

Рис. 2

На основании определения (1) можно сказать, что, если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей числовой оси, то справедливы следующие *предельные* соотношения:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = F(-\infty) = 1.$$

Как и всякий закон распределения, функция распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения.

Свойства функции распределения

1. $0 \le F(x) \le 1$ – это свойство следует из вероятностного смысла функции распределения, так как $0 \le P(X<x) \le 1$.

2. $F(x)$ – *неубывающая функция аргумента* x, *то есть, если* $x_1<x_2$, *то* $F(x_1) \le F(x_2)$.

Доказательство. Если $x_1<x_2$, то из определения следует, что событие $X<x_2$ является суммой двух несовместных событий: $X<x_1$ и $x_1 \le X<x_2$. Тогда, на основании теоремы сложения вероятностей несовместных событий, имеем:

$$P(X<x_2)=P(X<x_1)+P(x_1 \le X<x_2).$$

Откуда:

$$P(x_1 \le X<x_2)=P(X<x_2)–P(X<x_1)=F(x_2)–F(x_1).$$

Но, поскольку вероятность события – величина неотрицательная, то из $P(x_1 \le X<x_2) \ge 0$ следует, что $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Следствие 1. *Если все возможные значения случайной величины* X *принадлежат интервалу* $(a; b)$, *то*:

$F(x)=0$, если $x \le a$,

$F(x)=1$, если $x>b$.

Доказательство. Действительно, согласно условию, так как все значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то событие, заключающееся в том, что случайная величина X примет свои значения из интервала $(-\infty; x)$ при $x \le a$, является невозможным и $F(x)=P(X<x)=0$.

Событие же, заключающееся в том, что случайная величина примет свои значения из интервала $(-\infty; x)$ при $x \ge b$, – достоверно и $F(x)=P(X<x)=1$.

Следствие 2. *Вероятность попадания случайной величины* X *в полуинтервал* $[a; b)$ *равна разности значений функции распределения на правом и левом концах интервала* $(a; b)$:

$$P(a \le X<b)=F(b)–F(a), \qquad (2)$$

то есть вероятность того, что случайная величина примет свои значения из полуинтервала $[a; b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале (принято левый конец интервала включать в промежуток).

Доказательство. Пусть событие A заключается в попадании значений величины X в интервал $(-\infty; a)$, то есть $X \in (-\infty; a)$; событие B состоит в том, что $X \in (-\infty; b)$, а событие C в том, что $X \in [a; b)$. Тогда, на основании определения и теоремы сложения двух несовместных событий, имеем:

$$B=A+C$$

и, так как эти события несовместны,

$$P(B)=P(A)+P(C),$$

или

$$P(C)=P(B)–P(A).$$

Тогда из определения (формула (48)) и свойства 2 следует, что:

$$P(C)=P(a \le X<b)=P(B)–P(A)=F(b)–F(a).$$

Следствие 3. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина* X *примет заранее указанное значение* m, *равна нулю*.

Доказательство: На основании следствия 2 и формулы (2) вероятность попадания непрерывной случайной величины в полуинтервал $[m; x)$:

$$P(m \le X < x) = F(x) - F(m).$$

Предположим, что точка x на числовой оси стремится к m, то есть $x \to m$. Тогда в силу того, что точка x будет сколь угодно близко подходить к точке m, полуинтервал $[m; x)$ будет стремиться принять размеры точки, то есть в пределе будет содержать одну-единственную точку m.

Следовательно, из условия $x \to m$ и непрерывности функции распределения получим:

$$\lim_{x \to m} F(x) = F(m)$$

и, переходя к пределу для вероятности:

$$\lim_{x \to m} P(m \le X < x) = P(X = m) = \lim_{x \to m} \left[F(x) - F(m)\right] = F(m) - F(m) = 0.$$

Следствие 4. *Для непрерывной случайной величины X справедливы равенства*:

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a),$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a), \qquad (3)$$

где $F(x) = P(X < x)$ – её функция распределения.

Доказательство. На основании следствий 2, 3 и формулы (1) имеем:

$$P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) + P(X = b) = [F(b) - F(a)] + 0 = F(b) - F(a).$$

Второе равенство доказывается аналогично.

Плотность распределения непрерывной случайной величины

Пусть непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения $F(x)$, непрерывную и дифференцируемую во всей области значений, принимаемых случайной величиной. Тогда вероятность попадания значений случайной величины X в интервал $(x; x+\Delta x)$ (на основании следствия 4 из определения функции распределения случайной величины):

$$P(x < X < x + \Delta x) = P(\Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x).$$

Разделим левую и правую части этого равенства на ширину выбранного интервала Δx:

$$\frac{P(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x). \qquad (4)$$

Плотностью распределения вероятности (*плотностью вероятности*) *непрерывной случайной величины X называют предел отношения приращения функции распределения ΔF*(*x*) *к приращению аргумента Δx при условии, что* $\Delta x \to 0$. Иначе говоря, плотность вероятности есть производная от функции распределения, равная: $f(x) = F'(x) = \dfrac{dF}{dx}$. Иногда плотность распределения непрерывной случайной величины называют *дифференциальным законом распределения.*

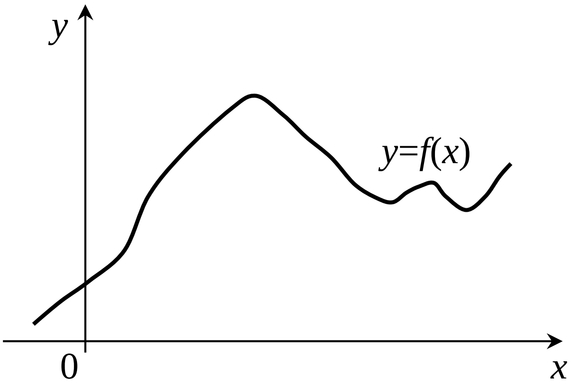

Рис. 3

График функции $y=f(x)$, изображённой на рис. 3, называют кривой распределения плотности вероятности.

Свойства плотности вероятности

1. *Плотность вероятности* $f(x)$ *– функция неотрицательная*: $f(x) \geq 0$.

Доказательство. Из того, что функция распределения $F(x)$ неубывающая (см. свойство 2 функции распределения и свойства производной), следует $F'(x)=f(x) \geq 0$.

2. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X в результате испытания примет свои значения из интервала* (*a*, *b*), *равна определённому интегралу от плотности вероятности* $f(x)$ *в пределах этого интервала*:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (5)$$

Это равенство доказывается на основании свойств функции распределения вероятностей $F(x)$ – см. формулы (2) и (3).

Тогда на основании геометрического смысла определённого интеграла можно заключить, что вероятность попадания случайной величины в интервал $(a; b)$, $[a; b)$, $(a; b]$ или $[a; b]$ равна площади криволинейной трапеции *aABb*, ограниченной графиком функции $f(x)$, отрезком $[a; b]$ и прямыми $x=a$ и $x=b$, то есть: $P(a<X<b)=P_{ab}=S_{aABb}$ (рис. 4).

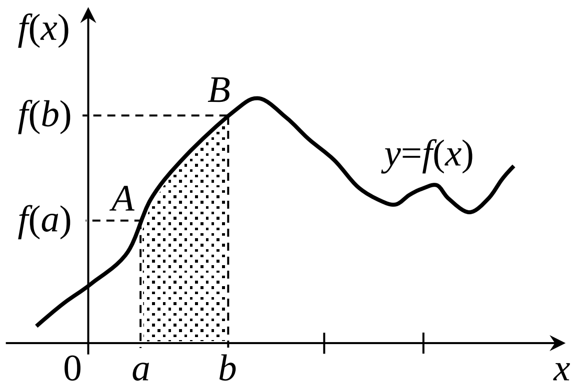

Рис. 4

3. *Функция распределения непрерывной случайной величины может быть выражена через плотность вероятности по формуле*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (6)$$

Доказательство. Действительно, на основании определения функции распределения, её свойств и формулы (5) имеем: $P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x) - F(-\infty) = F(x) - 0 = F(x)$.

4. *Несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятности непрерывной случайной величины равен единице*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \qquad (7)$$

Доказательство. Если случайная величина X распределена на всей действительной оси, то, заменив верхний предел интегрирования в выражении (6) на $+\infty$, получим выражение $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$.

Выражение (7) называют **условием нормировки** плотности вероятностей для непрерывной случайной величины.

На основании этого условия следует, что *вероятность какого-либо события, связанного с непрерывной случайной величиной, нужно воспринимать как часть площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции* $f(x)$ *– долю единицы* (см. рис. 5). Полная площадь под графиком функции $f(x)$ при этом, согласно условию нормировки, равна единице.

5. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет наперёд заданное значение a, равна нулю.*

Доказательство. На основании свойств определенного интеграла и формулы (5) имеем:

$$P(X=a)=\int_a^a f(x)dx=F(a)-F(a)=0. \qquad (8)$$

Это подтверждается и условием нормировки: площадь под графиком функции при таком условии равна нулю.

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

*Под **математическим ожиданием непрерывной случайной величины** X, возможные значения которой принадлежат отрезку* [*a*; *b*], *понимают значение определённого интеграла*:

$$M(X)=\mu=\int_a^b x\cdot f(x)dx, \qquad (9)$$

где $f(x)$ *– плотность вероятности.*

Замечание. Для непрерывной случайной величины, распределенной на всей действительной оси *OX*, математическое ожидание может быть представлено следующей формулой:

$$M(X)=\mu=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx. \qquad (10)$$

Так же, как и для дискретной, для непрерывной случайной величины число, равное $M(X)=\mu$, называется центром рассеяния её возможных значений.

Дисперсией непрерывной случайной величины *X называется математическое ожидание квадрата её отклонения от математического ожидания*: $D(X)=M[X-M(X)]^2$.

Если непрерывная случайная величина *X* принимает значения из отрезка [*a*; *b*], то её дисперсия может быть найдена при помощи определённого интеграла:

$$D(X)=\sigma^2=\int_a^b (x-\mu)^2\cdot f(x)dx, \qquad (11)$$

где $f(x)$ – плотность вероятности; $\mu=M(X)$ – математическое ожидание непрерывной случайной величины.

Если же непрерывная случайная величина распределена на всей действительной оси *OX*, то дисперсия может быть представлена следующей формулой:

$$D(X)=\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\cdot f(x)dx. \qquad (12)$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины – *число, характеризующее среднюю величину рассеяния отдельных значений случайной величины относительно её математического ожидания, размерность* *которого совпадает с размерностью самой случайной величины. Среднее квадратическое отклонение равно квадратному корню из дисперсии:*

$$\sigma = \sqrt{D(X)}\ . \tag{13}$$

Эта величина имеет ещё одно название – ***стандартное отклонение***.

Законы распределения непрерывной случайной величины

Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина X, *все возможные значения которой принадлежат отрезку* $[a;\ b]$, *имеет* ***равномерное распределение***, *если плотность её вероятности на этом отрезке постоянна* $f(x)=C$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ C, & a \le x \le a; \\ 0, & x > b. \end{cases} \tag{14}$$

Из определения следует, что событие, заключающееся в том, что случайная величина X примет свои значения из данного отрезка, является достоверным и, следовательно:

$$p = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b Cdx = C \cdot (b-a) = 1\,, \tag{15}$$

откуда плотность вероятности равномерно распределённой на $[a;\ b]$ случайной величины X:

$$f(x) = C = \frac{1}{b-a}\,. \tag{16}$$

Графическое изображение плотности вероятности равномерно распределённой на отрезке $[a;\ b]$ случайной величины представлено на рис. 5. Согласно определению плотности вероятности и условию нормировки (7), площадь под кривой равна единице: $S_{aABb}=1$.

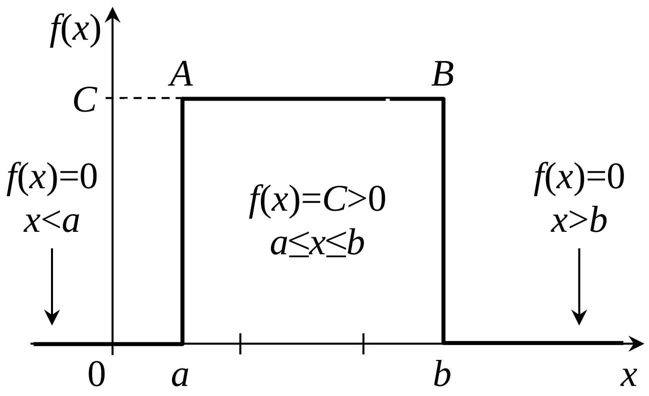

Рис. 5

Тогда, на основании свойства 2 и следствия 1 (формулы 5 и 6), функция распределения $F(x)$ равномерно распределённой на отрезке $[a;\ b]$ случайной величины с постоянной плотностью вероятности $f(x)$ может быть представлена равенством:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{b-a} \cdot \int_{a}^{x} dx = \frac{x-a}{b-a},$$

где $x \in [a;b]$, или

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \qquad (17)$$

Следовательно, если распределение случайной величины описывается условиями (14) и (17), то вероятность её попадания в некоторый интервал (x_1; x_2), принадлежащий [a; b], может быть определена как отношение длин этих отрезков:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{x_1 - x_2}{b-a}. \qquad (18)$$

Показательное (экспоненциальное) распределение

Рассмотрим области применения показательного распределения.

1. Задачи, связанные с данными типа «время жизни». Причём это не следует связывать только с живыми объектами. В медико-биологических исследованиях это может быть продолжительность жизни больных при некоторых заболеваниях, в технике – продолжительность безотказной работы устройств, в психологии – время, затрачиваемое испытуемым на выполнение тех или иных тестовых заданий или выживаемость знаний.

2. Задачи, связанные с массовым обслуживанием. Это могут быть интервалы времени, связанные с вызовом «скорой помощи», телефонными звонками и др.

Непрерывная случайная величина X имеет ***показательное*** (*экспоненциальное*) *распределение с параметром* t>0, *если её плотность вероятности может быть описана формулой*:

$$f(x,t) = t \cdot e^{-tx}, \ (x \ge 0). \qquad (19)$$

Параметр t в ряде прикладных областей часто именуют «показателем риска».

Иногда вместо параметра t используют параметр $r = \frac{1}{t}$, тогда выражение (19) имеет вид:

$$f(x,r) = \frac{1}{r} \cdot e^{-\frac{x}{r}}, \ (x \ge 0). \qquad (20)$$

Графически плотность вероятности показательного распределения с параметром t имеет вид (рис. 6):

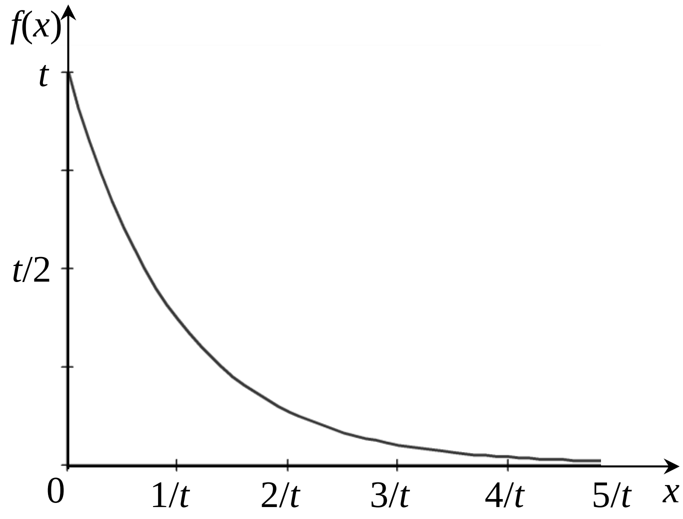

Рис. 6

Функция показательного распределения $F(x, t)=P(X<x)$ равна

$$F(x,t)=\begin{cases}1-e^{-tx}, x\geq 0;\\ 0, \quad x<0.\end{cases}$$

От других экспоненциальное распределение отличается отсутствием последействия или «памяти», то есть справедливо выражение: $P(X\geq u+t)=P(X\geq u)$ для любых $u\geq 0$, и $t\geq 0$, при условии, что $X\geq t$ (иногда для этого выражения можно встретить запись: $P(X\geq u+t \mid X\geq t)=P(X\geq u)$).

Поясним эту формулу на следующем примере.

Пример. Пусть X – время службы кардиостимулятора, и оно подчиняется показательному распределению. Тогда для некоторого кардиостимулятора, уже прослужившего время t_1, вероятность прослужить дополнительное время t_2 совпадает с вероятностью прослужить время t_2 для нового аналогичного прибора. Отсюда следует, что это соотношение как бы исключает износ и старение.

Свойства показательного распределения

1. *Математическое ожидание случайной величины X, имеющей показательное распределение с параметром* t, *равно*:

$$M(X)=\frac{1}{t}, \tag{21}$$

то есть это соотношение придаёт параметру t простой вероятностный смысл: $\frac{1}{t}=r$ – это, например, среднее время между двумя вызовами врача на дом и т. д.

2. *Дисперсия случайной величины X, распределённой по экспоненциальному закону с параметром* t, *равна*:

$$D(X)=\frac{1}{t^2}. \tag{22}$$

При этом среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{1}{t}. \qquad (23)$$

Сравнивая (21) и (23), имеем: $M(X)=\sigma(X)$.

Закон нормального распределения непрерывной случайной величины (закон Лапласа–Гаусса)

Этот закон теории вероятностей имеет фундаментальное значение при изучении случайных процессов. При помощи его описываются многие случайные величины в метрологии, биологии, медицине и др.

Выдающимися математиками Муавром (1667–1754) и Ламбертом (1728–1777), а позднее Лапласом (1749–1827) и Гауссом (1777–1855) было доказано, что для некоторых непрерывных случайных величин вероятность dP попадания значений величины в малый интервал (x; $x+dx$) зависит не только от ширины этого интервала dx (что справедливо для равномерного распределения), но и от его положения относительно центра рассеяния μ.

Закон распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют ***нормальным****, если функция плотности её вероятности описывается формулой Лапласа-Гаусса*:

$$f(x)=f(x,\sigma,\mu)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (24)$$

Зависимость $f(x)=f(x, \sigma, \mu)$ говорит о том, что при нормальном распределении плотность вероятности зависит не только от значений, принимаемых случайной величиной X, но и от параметров μ и σ.

Свойства функции плотности вероятности нормального распределения

1. *Функция определена и непрерывна на всей числовой оси* $x\in(-\infty;+\infty)$.

2. *Ось OX является горизонтальной асимптотой для графика функции*: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, иными словами, по мере возрастания разности $|x-\mu|$ значения функции $f(x)$ стремятся к нулю.

3. *Точка $x=\mu$ является точкой максимума графика функции*, *значение функции в этой точке равно* $f(\mu)=\dfrac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}$.

4. *График функции симметричен относительно прямой $x=\mu$* (при отклонении значений случайной величины от центра рассеяния μ на одинаковые расстояния значения функции равны, то есть $f(\mu+\Delta x)=f(\mu-\Delta x)$).

График функции плотности вероятности нормального закона распределения представлен на рис. 7. Он имеет колоколообразную форму, положение его в системе координат и форма зависят от параметров μ и σ.

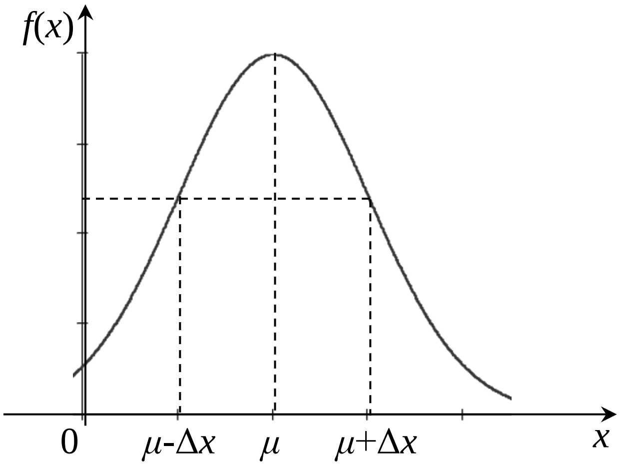

Рис. 7

Замечание. Отметим, что случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения, если:

•она непрерывна;

•наиболее вероятным её значением является среднее значение (математическое ожидание);

•с ростом отклонения от среднего значения плотность вероятности для таких значений уменьшается;

•значения, имеющие одинаковые отклонения от среднего в обе стороны, имеют одинаковые плотности вероятностей.

Единичное нормальное распределение

Частный случай, когда в выражении (24) параметр $\mu=0$, а $\sigma=1$, называется *единичным нормальным*, или *стандартным распределением*.

Функция плотности вероятности $f(x)=f(x,\ \sigma,\ \mu)=f(x,\ 1,\ 0)=\varphi(x)$ в этом случае имеет вид:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (25)$$

График функции $\varphi(x)$ симметричен относительно оси ординат (рис. 8).

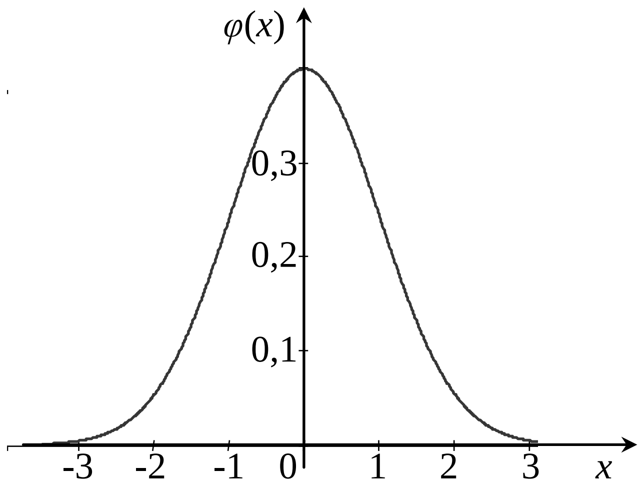

Рис. 8

В отличие от (24), значения функции, представленные выражением (25), зависят только от одной переменной x, поэтому легко могут быть сведены в таблицу (а так как функция $\varphi(x)$ – чётная, то в таблицу сведены только значения функции для положительных значений аргумента – см. **Приложение I**).

Функция распределения

Рассмотрим более простой случай – ***функцию нормального распределения для плотности вероятности***, представленной выражением (25). На основании формулы (53) функция распределения может быть представлена выражением:

$$\Phi_0(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (26)$$

Функция $\Phi_0(x)$ обладает следующим важным свойством:

$$\Phi_0(x)+\Phi_0(-x)=1,$$

или

$$\Phi_0(-x)=1-\Phi_0(x). \qquad (27)$$

Оно вытекает из геометрических представлений вероятности (см. свойства плотности вероятности) и симметричности подынтегральной функции $\varphi(x)$ относительно x=0 (см. рис. 8).

Функция распределения непрерывной случайной величины X, имеющей нормальное распределение, имеет вид:

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \qquad (28)$$

Произведя в подынтегральной функции замену переменной $t = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$, откуда $dx=\sigma dt$, мы приходим к функции стандартного распределения вида (26):

$$F(x) = P(T < t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi_0(t) = \Phi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \qquad (29)$$

значение интеграла (29) для соответствующего нормированного отклонения при $t=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ может быть найдено из **Приложения II**.

Вероятность попадания нормально распределённой случайной величины в заданный интервал

•*Вероятность попадания непрерывной случайной величины в некоторый интервал* (x_1; x_2) *может быть найдена по формуле*:

$$P(x_1 < X < x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\Phi_0\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right). \qquad (30)$$

•*Вероятность того, что отклонение нормально распределённой случайной величины X от её математического ожидания μ по модулю не превысит некоторого заданного положительного числа ε, может быть найдена по формуле*:

$$P(|X-\mu|<\varepsilon)=2\cdot\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-1. \qquad (31)$$

Из таблицы **Приложения II** находим, что $\Phi_0(0{,}7)=0{,}758036$. Тогда:

$$P(\mu-\sigma<x<\mu+\sigma)=2\cdot 0{,}758036-1=0{,}516072.$$

•«***Правило трёх сигм***». *Вероятность попадания значения нормально распределённой случайной величины в интервал $\mu\pm 3\sigma$ является событием почти достоверным, равным* 99,74% ($p\approx 1$).

Пример. Случайная величина X имеет нормальное распределение с $\mu=3$ и $\sigma=2$. Найти вероятность того, что X примет свои значения:

1) из интервала (2; 5); 2) $P(X\geq 6)$.

Решение.

1. Используя формулы (27), (28) и **Приложение II**, имеем:

$$P(2<x<5)=\Phi_0\left(\frac{5-3}{2}\right)-\Phi_0\left(\frac{2-3}{2}\right)=\Phi_0(1)-\Phi_0(-0{,}5)=\Phi_0(1)-(1-\Phi_0(0{,}5))=$$

$$=\Phi_0(1)+\Phi_0(0{,}5)-1=0{,}8413+0{,}6915-1=0{,}5328.$$

2. На основании определения непрерывной случайной величины мы можем рассматривать лишь вероятность события $P(X<x)$. Воспользовавшись свойством вероятности противоположного события, получим: $P(X\geq 6)=1-P(X<6)$.

Тогда $P(X\geq 6)=1-\Phi_0\left(\dfrac{6-3}{2}\right)=1-\Phi_0(1{,}5)=1-0{,}9332=0{,}0668$.

Пример. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $\mu=7$ и дисперсией $\sigma^2=9$. Найти границы интервала $\mu\pm\varepsilon$, если известно, что вероятность попасть в него $P(\mu-\varepsilon<X<\mu+\varepsilon)=0{,}95$ (то есть, при известном μ и σ необходимо найти числовое значение ε).

Решение. На основании условия примера и (31), имеем:

$$P(|X-\mu|<\varepsilon)=P(\mu-\varepsilon<X<\mu+\varepsilon)=2\cdot\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-1=0{,}95.$$

Откуда:

$$2\cdot\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)=1+0{,}95=1{,}95$$

или

$$\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)=\frac{1{,}95}{2}=0{,}975.$$

По таблице **Приложения II** находим, что $\Phi_0(x)=0{,}975$ выполняется при $x=1{,}96$ или $\frac{\varepsilon}{\sigma}=1{,}96$.

Откуда: $\varepsilon=1{,}96\cdot\sigma=1{,}96\cdot3=5{,}88$. Тогда границы интервала для X можно записать: $(7-5{,}88<X<7+5{,}88)$ или $(1{,}12<X<12{,}88)$.

Литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2000.
2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1999.
3. Мхитарян, В. С. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / В. С. Мхитарян, В. Ф. Шишов, А. Ю. Козлов. – М.: Академия, 2012.
4. Тарасов, Л. В. Мир, построенный на вероятности / Л. В. Тарасов. – М.: Просвещение, 1984.
5. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и её приложения / В. Феллер. – М.: Мир, 1984.

Приложение I

Значения функции Лапласа
(*плотность единичного нормального распределения*)

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,0	0,3 98942	0,3 98922	0,3 98862	0,3 98763	0,3 98623	0,3 98444	0,3 98225	0,3 97966	0,3 97668	0,3 97330
,1	0,3 96953	0,3 96536	0,3 96080	0,3 95585	0,3 95052	0,3 94479	0,3 93868	0,3 93219	0,3 92531	0,3 91806
,2	0,3 91043	0,3 90242	0,3 89404	0,3 88529	0,3 87617	0,3 86668	0,3 85683	0,3 84663	0,3 83606	0,3 82515
,3	0,3 81388	0,3 80226	0,3 79031	0,3 77801	0,3 76537	0,3 75240	0,3 73911	0,3 72548	0,3 71154	0,3 69728
,4	0,3 68270	0,3 66782	0,3 65263	0,3 63714	0,3 62135	0,3 60527	0,3 58890	0,3 57225	0,3 55533	0,3 53812
,5	0,3 52065	0,3 50292	0,3 48493	0,3 46668	0,3 44818	0,3 42944	0,3 41046	0,3 39124	0,3 37180	0,3 35213
,6	0,3 33225	0,3 31215	0,3 29184	0,3 27133	0,3 25062	0,3 22972	0,3 20864	0,3 18737	0,3 16593	0,3 14432
,7	0,3 12254	0,3 10060	0,3 07851	0,3 05627	0,3 03389	0,3 01137	0,2 98872	0,2 96595	0,2 94305	0,2 92004
,8	0,2 89692	0,2 87369	0,2 85036	0,2 82694	0,2 80344	0,2 77985	0,2 75618	0,2 73244	0,2 70864	0,2 68477
,9	0,2 66085	0,2 63688	0,2 61286	0,2 58881	0,2 56471	0,2 54059	0,2 51644	0,2 49228	0,2 46809	0,2 44390
,0	0,2 41971	0,2 39551	0,2 37132	0,2 34714	0,2 32297	0,2 29882	0,2 27470	0,2 25060	0,2 22653	0,2 20251
,1	0,2 17852	0,2 15458	0,2 13069	0,2 10686	0,2 08308	0,2 05936	0,2 03571	0,2 01214	0,1 98863	0,1 96520
,2	0,1 94186	0,1 91860	0,1 89543	0,1 87235	0,1 84937	0,1 82649	0,1 80371	0,1 78104	0,1 75847	0,1 73602
,3	0,1 71369	0,1 69147	0,1 66937	0,1 64740	0,1 62555	0,1 60383	0,1 58225	0,1 56080	0,1 53948	0,1 51831
,4	0,1 49727	0,1 47639	0,1 45564	0,1 43505	0,1 41460	0,1 39431	0,1 37417	0,1 35418	0,1 33435	0,1 31468
,5	0,1 29518	0,1 27583	0,1 25665	0,1 23763	0,1 21878	0,1 20009	0,1 18157	0,1 16323	0,1 14505	0,1 12704
,6	0,1 10921	0,1 09155	0,1 07406	0,1 05675	0,1 03961	0,1 02265	0,1 00586	0,0 98925	0,0 97282	0,0 95657
,7	0,0 94049	0,0 92459	0,0 90887	0,0 89333	0,0 87796	0,0 86277	0,0 84776	0,0 83293	0,0 81828	0,0 80380
,8	0,0 78950	0,0 77538	0,0 76143	0,0 74766	0,0 73407	0,0 72065	0,0 70740	0,0 69433	0,0 68144	0,0 66871
,9	0,0 65616	0,0 64378	0,0 63157	0,0 61952	0,0 60765	0,0 59595	0,0 58441	0,0 57304	0,0 56183	0,0 55079
,0	0,0 53991	0,0 52919	0,0 51864	0,0 50824	0,0 49800	0,0 48792	0,0 47800	0,0 46823	0,0 45861	0,0 44915
,1	0,0 43984	0,0 43067	0,0 42166	0,0 41280	0,0 40408	0,0 39550	0,0 38707	0,0 37878	0,0 37063	0,0 36262
,2	0,0 35475	0,0 34701	0,0 33941	0,0 33194	0,0 32460	0,0 31740	0,0 31032	0,0 30337	0,0 29655	0,0 28985
,3	0,0 28327	0,0 27682	0,0 27048	0,0 26426	0,0 25817	0,0 25218	0,0 24631	0,0 24056	0,0 23491	0,0 22937
,4	0,0 22395	0,0 21862	0,0 21341	0,0 20829	0,0 20328	0,0 19837	0,0 19356	0,0 18885	0,0 18423	0,0 17971
,5	0,0 17528	0,0 17095	0,0 16670	0,0 16254	0,0 15848	0,0 15449	0,0 15060	0,0 14678	0,0 14305	0,0 13940

,6	0,013583	0,013234	0,012892	0,012558	0,012232	0,011912	0,011600	0,011295	0,010997	0,010706
,7	0,010421	0,010143	0,009871	0,009606	0,009347	0,009094	0,008846	0,008605	0,008370	0,008140
,8	0,007915	0,007697	0,007483	0,007274	0,007071	0,006873	0,006679	0,006491	0,006307	0,006127
,9	0,005953	0,005782	0,005616	0,005454	0,005296	0,005143	0,004993	0,004847	0,004705	0,004567
,0	0,004432	0,004301	0,004173	0,004049	0,003928	0,003810	0,003695	0,003584	0,003475	0,003370
,1	0,003267	0,003167	0,003070	0,002975	0,002884	0,002794	0,002707	0,002623	0,002541	0,002461
,2	0,002384	0,002309	0,002236	0,002165	0,002096	0,002029	0,001964	0,001901	0,001840	0,001780
,3	0,001723	0,001667	0,001612	0,001560	0,001508	0,001459	0,001411	0,001364	0,001319	0,001275
,4	0,001232	0,001191	0,001151	0,001112	0,001075	0,001038	0,001003	0,000969	0,000936	0,000904
,5	0,000873	0,000843	0,000814	0,000785	0,000758	0,000732	0,000706	0,000681	0,000657	0,000634
,6	0,000612	0,000590	0,000569	0,000549	0,000529	0,000510	0,000492	0,000474	0,000457	0,000441
,7	0,000425	0,000409	0,000394	0,000380	0,000366	0,000353	0,000340	0,000327	0,000315	0,000303
,8	0,000292	0,000281	0,000271	0,000260	0,000251	0,000241	0,000232	0,000223	0,000215	0,000207

Замечания. **1.** Для вычисления значения функции при отрицательных значениях аргумента используется соотношение $\varphi(-t)=\varphi(t)$.

2. В Microsoft Excel для расчёта плотности единичного нормального распределения используется формула НОРМРАСП(x;0;1;ЛОЖЬ).

Приложение II

Значение стандартной функции распределения нормально распределённой случайной величины

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Замечания

1. Для вычисления значения функции при отрицательных значениях аргумента используется соотношение $\Phi_0(-x)=1-\Phi_0(x)$.

2. В Microsoft Excel для расчёта стандартной функции распределения нормально распределённой случайной величины используется формула НОРМСТРАСП(x).