Непрерывные случайные величины

1. Точка A бросается в круг радиуса 1. Случайная величина ξ – расстояние от точки A до центра круга. Найти плотность распределения величины ξ, построить её график.

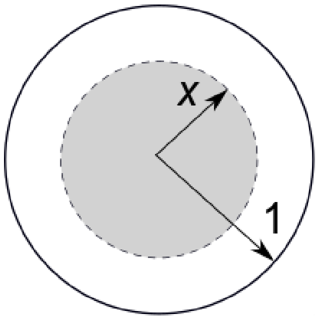
Решение.

Данная случайная величина принимает значения из промежутка $[0, 1]$, поэтому вне заданного промежутка плотность распределения равна 0.

Сначала построим функцию распределения этой случайной величины

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x).$$

Можно считать, что случайная точка равномерно распределена в круге. Для вычисления значений функции распределения на отрезке $[0, 1]$ используем геометрическую вероятность



Тогда $F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \frac{\pi x^2}{\pi} = x^2$ на $[0, 1]$.

Вычислим плотность вероятностей на данном отрезке как производную функции распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases} \qquad f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

График полученной плотности распределения постройте самостоятельно.

2. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f_\xi(x) = \begin{cases} c \cdot cosx, & -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти

а) значения константы c;

б) функцию распределения величины ξ;

в) $\mathbf{P}\left(|\xi| < \frac{\pi}{4}\right)$;

г) математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

Решение.

а) Значение константы c найдём из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)dt = 1.$$

Плотность распределения отлична от нуля только на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому получим

$$1 = c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\, dt = c \cdot (\sin(t))_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = c \cdot \left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = c \cdot [1 - (-1)] =$$

$$= 2c \Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow c = 0.5.$$

б) Чтобы найти функцию распределения величины ξ, нужно проинтегрировать её плотность распределения

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt.$$

Заметим, что на промежутке $\left(-\infty; -\frac{\pi}{2}\right]$ значения функции распределения будут равны нулю, а на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \infty\right)$ – единице, поэтому воспользуемся приведенной выше формулой для значений на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$$F_\xi(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} 0.5\cos t\,dt = 0.5\cdot(\sin(t))_{-\frac{\pi}{2}}^{x} = 0.5\cdot\left[\sin x - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= 0.5\cdot[\sin x - (-1)] = 0.5\sin x + 0.5.$$

в)

$$\mathbf{P}\left(|\xi| < \frac{\pi}{4}\right) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 0.5\cos t\,dt = 0.5\cdot(\sin(t))_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 0.5\cdot\left[\sin\frac{\pi}{4} - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= 0.5\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707.$$

г)

$$\boldsymbol{M}\xi = 0.5\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt = \left|\begin{matrix} u = t \\ du = dt \\ dv = \cos t\,dt \\ v = \sin t \end{matrix}\right| = 0.5\cdot(t\sin t)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 0.5\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt =$$

$$= 0.5\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot 1 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot(-1)\right] - 0.5(-\cos t)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 + 0.5\cdot 0 = 0.$$

Можно было сразу заметить, что интегрируется нечётная функция по симметричным границам.

$$\boldsymbol{D}\xi = \boldsymbol{M}\xi^2 - (\boldsymbol{M}\xi)^2 = 0.5\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos t\,dt - 0^2 = \left|\begin{matrix} u = t^2 \\ du = 2tdt \\ dv = \cos t\,dt \\ v = \sin t \end{matrix}\right| =$$

$$= 0.5\cdot(t^2\sin t)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 0.5\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt = \left|\begin{matrix} u = t \\ du = dt \\ dv = \sin t\,dt \\ v = -\cos t \end{matrix}\right| =$$

$$= 0.5\cdot\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot 1 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot(-1)\right] - 0.5(-t\cos t)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+ 0.5\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos t)dt =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 0.5\cdot\left[-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] - 0.5\cdot(-\sin t)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 0 - 0.5\cdot[-1 + (-1)] = \frac{\pi^2}{4} + 1.$$

3. Время T выхода из строя радиостанции подчинено показательному закону распределения с плотностью

$$f_\xi(t) = \begin{cases} 0{,}2e^{-0{,}2t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения случайной величины T;

б) математическое ожидание и дисперсию случайной величины T;

в) вероятность того, что радиостанция сохранит работоспособность от 1 до 5 часов работы.

Решение.

а) Заметим, что для отрицательных значений t функция распределения будет равна нулю, поэтому найдем значения функции распределения на промежутке $(0; +\infty)$

$$F_\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} f_\xi(u)du = 0.2\int_0^t e^{-0.2u}du = 0.2\cdot\left(\frac{e^{-0.2u}}{-0.2}\right)_0^t = -e^{-0.2t} + 1.$$

б)

$$\boldsymbol{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_\xi(t) dt = 0.2 \int_{0}^{+\infty} t e^{-0.2t} dt = \ \dots = 5.$$

Предлагаем вместо многоточия самостоятельно проинтегрировать по частям.

в)

$$\mathbf{P}(1 \le \xi \le 5) = F_\xi(5) - F_\xi(1) = 1 - e^{-0.2\cdot 5} - (1 - e^{-0.2\cdot 1})$$
$$= 1 - e^{-1} - 1 + e^{-0.2} \approx 0.45.$$

4. Установлено, что случайная величина ξ имеет нормальное распределение, а также известно, что $\mathbf{P}(\xi > 20) = 0{,}02$, а $\mathbf{P}(\xi < 10) = 0{,}31$. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Найти вероятность того, что при трех независимых опытах величина ξ примет значение из отрезка [14; 20] ровно один раз.

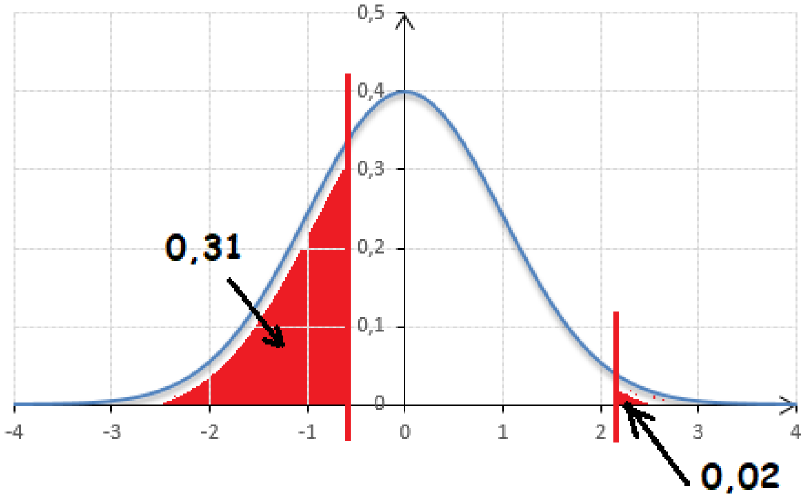
Решение.

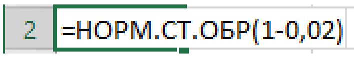
Пусть $\boldsymbol{M}\xi = a, \boldsymbol{D}\xi = \sigma^2$, введём $\xi_0 = \frac{\xi - a}{\sigma}$. Тогда величина ξ_0 имеет стандартное нормальное распределение, его квантили легко находить в MS Excel.

Перепишем условия для ξ_0:

$$\mathbf{P}\left(\xi_0 > \frac{20 - a}{\sigma}\right) = 0{,}02,$$

$$\mathbf{P}\left(\xi_0 < \frac{10 - a}{\sigma}\right) = 0{,}31.$$



Первое граничное значение вычислим по формуле 

, а второе – 

. В итоге получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{20-a}{\sigma} = 2.05 \\ \dfrac{10-a}{\sigma} = -0.496 \end{cases},$$

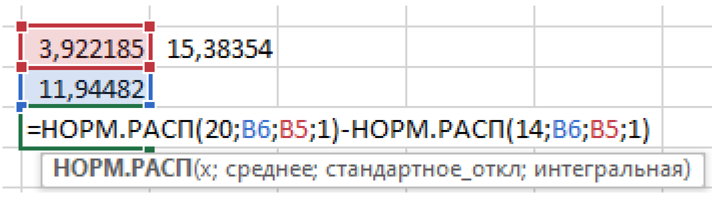
решая которую найдём $\boldsymbol{M}\xi = a \approx 11.945$, $\boldsymbol{D}\xi = \sigma^2 \approx 3.922^2 = 15.384$.

Найдем вероятность того, что при трех независимых опытах величина ξ примет значение из отрезка $[14;\ 20]$ ровно один раз.

Пусть событие $A = \{\xi \in [14;\ 20]\}$, тогда по формуле Бернулли искомая вероятность $p = \mathbf{P}(3,1) = \binom{3}{1}\mathbf{P}(A)^1\big(1-\mathbf{P}(A)\big)^2$.

Вычислим вероятность события A:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(14 \le \xi \le 20) = 0.280$$



Тогда искомая вероятность равна $p = 3 \cdot 0.280^1 \cdot 0.720^2 \approx 0.436$