Дискретные случайные величины

1. В урне находятся 3 белых и 5 черных шаров. Из нее извлекают 3 шара. Построить закон распределения числа извлеченных черных шаров. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение.

Пусть случайная величина ξ – количество извлеченных черных шаров в случайной бесповторной выборке из трех шаров. Эта случайная величина может принимать значения 0, 1, 2 или 3. Найдём вероятности событий $(\xi = 0)$, $(\xi = 1)$, $(\xi = 2)$ и $(\xi = 3)$.

Если одновременно извлекается 3 шара из 8, то множество элементарных исходов данного опыта состоит из $n = \binom{8}{3} = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} = 56$ равновероятных элементарных исходов, поэтому будем использовать классическую вероятность

$$\mathbf{P}(\xi = 0) = \frac{\binom{3}{3}\cdot\binom{5}{0}}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{56} \approx 0{,}018,$$

$$\mathbf{P}(\xi = 1) = \frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{3\cdot5}{56} = \frac{15}{56} \approx 0{,}268,$$

$$\mathbf{P}(\xi = 2) = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{3\cdot10}{56} = \frac{30}{56} \approx 0{,}536,$$

$$\mathbf{P}(\xi = 3) = \frac{\binom{3}{0}\cdot\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{10}{56} \approx 0{,}178.$$

Запишем полученные значения и их вероятности в таблицу – получим ряд распределения

$\boldsymbol{\xi}$	0	1	2	3
$\boldsymbol{p}$	0,018	0,268	0,536	0,178

Найдем среднее число черных шаров в выборке из трех шаров

$$M\xi = 0 \cdot 0{,}018 + 1 \cdot 0{,}268 + 2 \cdot 0{,}536 + 3 \cdot 0{,}178 = 1{,}874.$$

Дисперсию вычислим по формуле $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$.

Построим ряд распределения величины ξ^2 и найдем $M\xi^2$.

$\boldsymbol{\xi^2}$	0^2	1^2	2^2	3^2
$\boldsymbol{p}$	0,018	0,268	0,536	0,178

$$M\xi^2 = 0^2 \cdot 0{,}018 + 1^2 \cdot 0{,}268 + 2^2 \cdot 0{,}536 + 3^2 \cdot 0{,}178 = 4{,}014,$$
$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 4{,}014 - 1{,}874^2 = 4{,}014 - 3{,}512 = 0{,}502.$$

2. Вероятность того, что студент сдаст экзамен на «5», равна 0,2, на «4» – 0,4. Определить вероятности получения им оценок «3» и «2», если известно, что $\mathbf{M}\xi = 3{,}7$, где случайная величина ξ – оценка, полученная студентом на экзамене. Найти дисперсию величины ξ.

Решение.

Обозначим неизвестные вероятности получения оценок «2» и «3» за x и y соответственно и построим ряд распределения случайной величины ξ.

$\boldsymbol{\xi}$	2	3	4	5
$\boldsymbol{p}$	x	y	0,4	0,2

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + 0{,}4 + 0{,}2 = 1 \\ 2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}2 = 3{,}7 \end{cases}$$

Решением данной системы будет пара $\begin{cases} x = 0{,}1 \\ y = 0{,}3 \end{cases}$. Подставим найденные значения в ряд распределения

$\boldsymbol{\xi}$	2	3	4	5
$\boldsymbol{p}$	0,1	0,3	0,4	0,2

и составим ряд распределения случайной величины ξ^2

$\boldsymbol{\xi^2}$	2^2	3^2	4^2	5^2

p	0,1	0,3	0,4	0,2

Тогда $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = (2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}3 + 4^2 \cdot 0{,}4 + 5^2 \cdot 0{,}2) - -3{,}7^2 = 14{,}5 - 13{,}69 = 0{,}81.$

3. Вероятность появления события A в одном испытании равна p. Проводятся одинаковые независимые опыты. Случайная величина ξ – число появлений события A в 5 испытаниях. Известно, что дисперсия $\mathbf{D}\xi$ равна 1,25. Найти p.

Решение.

Пусть ξ_i – число успехов в i-ом опыте. Тогда ξ_i – индикатор случайного события A в i-ом опыте, а случайную величину ξ можно представить как

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5.$$

Так как случайные опыты независимы, то независимы и случайные величины ξ_i, но тогда по свойствам дисперсии

$$D\xi = D\xi_1 + D\xi_2 + D\xi_3 + D\xi_4 + D\xi_5.$$

Найдем $D\xi_i$, для этого построим её ряд распределения

ξ_i	0	1
p	$1-p$	p

Найдём $M\xi_i = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$ и построим ряд распределения ξ_i^2.

ξ_i^2	0^2	1^2
p	$1-p$	p

Тогда

$$D\xi_i = M\xi_i^2 - (M\xi_i)^2 = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p - p^2 = p - p^2 = p \cdot (1-p).$$

$$D\xi = 5 \cdot p \cdot (1-p) = 1{,}25.$$

Корнем данного уравнения будет $p = 0{,}5$.