Случайные события. Основные формулы теории вероятностей (часть 2)

Содержание

Независимость случайных событий

Пусть рассматривается вероятностное пространство $<\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P}>$.

События A, $B \subseteq \Omega$.

Определение 1. *События* A и B *независимы*, если $\mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Утверждение. Доказать, что если события A и B независимы, то события A и $\overline{B}$; $\overline{A}$ и B; $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы.

Доказательство.

$$\mathbf{P}\left(A \cdot \overline{B}\right) = \mathbf{P}(A \backslash B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) =$$
$$= \mathbf{P}(A) \cdot \left(1 - \mathbf{P}(B)\right) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}\left(\overline{B}\right),$$

то есть события A и $\overline{B}$ независимы.

Аналогично можно доказать независимость остальных пар.

Пример 1. События A и B несовместны. Могут ли они быть независимыми?

Решение.

Если события A и B независимы, то $\mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$, но несовместные события одновременно произойти не могут, поэтому $\mathbf{P}(A \cdot B) = 0$. Получаем $\mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = 0$, что означает, что одно из событий A или B имеет нулевую вероятность.

Ответ: да могут, если одно из событий имеет нулевую вероятность.

Замечание. Обратите внимание, что здесь мы не говорим, что событие невозможно. В примере 23 (на странице **Ошибка! Закладка не определена.**) приводится событие имеющее нулевую вероятность, но не являющееся невозможным.

Пример 2. Игральный кубик подбрасывается 3 раза. Найти вероятность того, что в первый раз выпадет 6, а во второй – нечётное число.

Решение. Рассмотрим два независимых опыта – два подбрасывания игрального кубика. Событие A = {выпала шестерка}, B = {выпало нечётное число}. Событие C = {в первый раз выпадет 6, а во второй – нечётное число}

– произведение событий A и B. Так как опыты независимы, то $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

Пример 3. Стрелок производит два независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания в десятку для данного стрелка равна 0,3, в девятку – 0,4. Найти вероятность того, что двумя выстрелами он выбьет не менее 19 очков.

Решение. Не менее 19 очков – это 19 или 20. То есть стрелок должен либо дважды попасть в десятку, либо один раз в десятку, а второй – в девятку.

Рассмотрим события A = {стрелок попал в девятку} и B = {стрелок попал в десятку} при одном выстреле. Будем в качестве индекса записывать номер опыта, в котором событие произошло, тогда

$$\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = 0{,}4$$
$$\mathbf{P}(B_1) = \mathbf{P}(B_2) = 0{,}3$$

Введем событие C = {двумя выстрелами стрелок выбил не менее 19 очков}.

$$C = A_1B_2 + B_1A_2 + B_1B_2$$
$$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A_1B_2 + B_1A_2 + B_1B_2) = \mathbf{P}(A_1B_2) + \mathbf{P}(B_1A_2) + \mathbf{P}(B_1B_2) =$$
$$= \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(B_2) + \mathbf{P}(B_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(B_1) \cdot \mathbf{P}(B_2) =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}33.$$

Определение 2. *События A_1, A_2, ... A_n независимы в совокупности, если для любого подмножества индексов $\{i_1, i_2, \ldots i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots n\}$ выполняется равенство*

$$\mathbf{P}\left(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}\right) = \mathbf{P}\left(A_{i_1}\right) \cdot \mathbf{P}\left(A_{i_2}\right) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}\left(A_{i_k}\right).$$

Пример 4. Пусть имеется правильный тетраэдр, на гранях которого написаны числа 1, 2, 3 и 4. Этот тетраэдр подбрасывается и смотрится число, выпавшее на нижней грани. Рассмотрим три события: A = {выпало 1 или 4}, B = {выпало 2 или 4}, C = {выпало 3 или 4}. Выяснить, зависимы или нет события A, B и C

а) попарно (для любых пар событий); б) в совокупности.

Решение. Заметим, что $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = 1/2$. Событие $A \cdot B$ = {выпала 4}, $A \cdot C$ = {выпала 4}, $B \cdot C$ = {выпала 4}, $A \cdot B \cdot C$ = {выпала 4}. Тогда $\mathbf{P}(A \cdot B) = 1/4$, $\mathbf{P}(A \cdot C) = 1/4$, $\mathbf{P}(B \cdot C) = 1/4$, $\mathbf{P}(A \cdot B \cdot C) = 1/4$.

Заметим, что попарная независимость имеется (для любых двух вероятность произведения равна произведению вероятностей), но в совокупности события зависимы.

Условная вероятность

Пример 5. Игральная кость подбрасывается один раз. Некто посмотрел на результат и сказал Вам, что выпало более трёх очков. Какова при этом вероятность того, что выпало нечётное число очков?

Решение. Пусть событие A = {выпало нечётное число очков} = $\{1, 3, 5\}$, а событие B = {выпало больше трех очков} = $\{4, 5, 6\}$. Тогда нужно найти вероятность события A при условии, что событие B произошло.

Когда стало известно, что выпало более трех очков, появилось больше информации об опыте. И в результате из шести вероятных исходов осталось только три. Событию А из этих равновозможных исходов благоприятен только один исход: выпадение пяти очков. Поэтому искомая вероятность равна 1/3.

Таким образом мы перешли к другому пространству элементарных исходов.

Определение 3. Вероятность события A при условии, что событие B произошло называют *условной вероятностью* и обозначают $\mathbf{P}(A|B)$.

Любую вероятность можно считать *условной*: $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|\Omega)$.

Если $\mathbf{P}(B) > 0$, то

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cdot B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Следует отличать условную вероятность одного события при осуществлении другого от вероятности им одновременно произойти.

Докажите самостоятельно, что при переходе к условной вероятности условия $(P1)$ – $(P3)$ остаются верными.

Пример 6. Монетку подбросили два раза. Событие A – выпадение хотя бы одной решки, событие B – выпадение орла при первом подбрасывании.

а) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию A.

б) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию В.

в) Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событиям А и В одновременно.

г) Найдите вероятность события АВ.

д) Найдите вероятность события A при условии B.

Решение.

а) A = {РР, РО, ОР},

б) B = {ОО, ОР},

в) $A \cdot B$ = {РР},

г) $\mathbf{P}(A \cdot B) = 1/4$,

д) $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cdot B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$.

Пример 7. (*Парадокс Монти-Холла*) Перед игроком три двери, за одной из которых приз. Игрок выбирает одну из них, не открывая. После этого ведущий открывает одну из оставшихся дверей. Ведущий точно знает, за которой из дверей находится приз, и открывает ту дверь, за которой приза нет (если игрок указал на дверь с призом, то ведущий равновероятно может открыть одну из оставшихся). Далее игроку предлагается изменить первоначально выбранную дверь на другую, оставшуюся закрытой. Повышаются ли шансы игрока при изменении выбранной двери?

Решение.

Ответ: выгодно сменить решение.

Изначально есть три равновероятных исхода, потому вероятность выиграть 1/3. Если изначально игрок выбрал правильную дверь, то он проиграет в случае смены двери (какую бы дверь не открыл ведущий), но если изначально игрок не угадал, то он выиграет (так как вторая дверь, за которой приза нет, уже открыта). Таким образом, при смене решения вероятность выигрыша равна 2/3, а если решение не менять – 1/3.

Замечание. Частая ошибка в рассуждениях заключается в том, что после того, как ведущий откроет одну из дверей останется две возможности, но они не будут равновероятными.

Вероятность произведения двух событий можно вычислить, зная одну из условных вероятностей.

Правило умножения. $\mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(A|B)$.

Пример 8. Антитабачный закон одобряет 66 % населения. Причем его одобряют 42 % курильщиков и 75 % некурящих граждан. Выберем случайного человека. Пусть событие A = { выбранный человек одобряет антитабачный закон }, событие B = { выбранный человек курит }. Найдите
а) $\mathbf{P}(A)$; б) $\mathbf{P}(A|B)$ и $\mathbf{P}(A|\bar{B})$; в) $\mathbf{P}(B)$; г) $\mathbf{P}(A \cdot B)$ и $\mathbf{P}(B|A)$?

Решение.

По условию 66 % населения одобряют антитабачный закон, то есть $\mathbf{P}(A) = 0{,}66$. Среди тех кто курит его одобряют 42 %, то есть $\mathbf{P}(A|B) = 0{,}42$, а среди тех кто не курит – 75 %, то есть $\mathbf{P}(A|\bar{B}) = 0{,}75$.

Дальше распишем вероятность события A как сумму двух несовместных событий $A \cdot B$ и $A \cdot \overline{B}$. Тогда

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cdot B) + \mathbf{P}(A \cdot \bar{B}) = \mathbf{P}(A|B) \cdot \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A|\bar{B}) \cdot \big(1 - \mathbf{P}(B)\big).$$

Отсюда получим уравнение $0{,}66 = 0{,}42 \cdot \mathbf{P}(B) + 0{,}75 \cdot \big(1 - \mathbf{P}(B)\big)$, решая которое находим $\mathbf{P}(B) = 3/11 \approx 0{,}27$.

Воспользовавшись правилом умножения, найдем

$$\mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(A|B) \cdot \mathbf{P}(B) = 0{,}42 \cdot 0{,}27 = 0{,}11.$$

Тогда $\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A \cdot B)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{0{,}11}{0{,}66} \approx 0{,}17$.

Обобщенное правило умножения. Для n событий правило умножения можно обобщить в виде

$$\mathbf{P}(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbf{P}(A_3|A_1A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_n|A_1A_2 \ldots A_{n-1})$$

Если события A и B – независимы, то получим, что $\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} =$ $= \frac{\mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)} = \mathbf{P}(B)$, то есть вероятность события B не меняется, в зависимости от того, произошло или не произошло событие A. Докажем в обратную сторону.

Утверждение. Известно, что $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}\big(B|\overline{A}\big)$. Доказать, что события A и B независимы.

Доказательство.

По правилу умножения запишем $\mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B|A)$, по условию $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B|\overline{A}) = \frac{\mathbf{P}(\overline{A} \cdot B)}{\mathbf{P}(\overline{A})}\cdot$, тогда $\mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(A) \cdot \frac{\mathbf{P}(\overline{A} \cdot B)}{\mathbf{P}(\overline{A})}$.

Заметим, что $\mathbf{P}(A \cdot B) + \mathbf{P}(\overline{A} \cdot B) = \mathbf{P}(B)$, отсюда $\mathbf{P}(\overline{A} \cdot B) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cdot B)$, $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$, тогда

$$\mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(A) \cdot \frac{\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cdot B)}{1 - \mathbf{P}(A)},$$

$$\mathbf{P}(A \cdot B) \cdot \left(1 - \mathbf{P}(A)\right) = \mathbf{P}(A) \cdot \left(\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cdot B)\right),$$

$$\mathbf{P}(A \cdot B) \cdot \left(1 - \mathbf{P}(A)\right) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(A \cdot B),$$

$$\mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B).$$

Замечание. В некоторой литературе в качестве определения независимых событий дается следующее «*события А и В независимы, если вероятность события В не меняется, в зависимости от того, произошло или не произошло событие А*». Мы только что доказали, что это определение и определение, введенное здесь, равносильны.

Формула полной вероятности

Пример 9. Пусть имеется две урны. В первой лежит три белых и два чёрных шара, а во второй – семь белых и три чёрных. Из случайной урны наугад извлекается шар. Какова вероятность достать белый шар?

Решение.

Пусть событие A = { из случайной урны достали белый шар }. Заметим, что вероятность вытащить белый шар зависит от того, из какой корзины достают шар. Тогда введём событие B = { шар достали из первой урны }.

По условию задачи $\mathbf{P}(A|B) = \frac{3}{5}$, а $\mathbf{P}(A|\overline{B}) = \frac{7}{10}$.

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cdot B) + \mathbf{P}(A \cdot \overline{B}) = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(A|B) + \mathbf{P}(\overline{B}) \cdot \mathbf{P}(A|\overline{B}).$$

Шар достают из случайной урны, поэтому можно считать, что $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\overline{B}) = 1/2$, тогда получим

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(A|B) + \mathbf{P}(\overline{B}) \cdot \mathbf{P}(A|\overline{B}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} = \frac{13}{20}.$$

Определение 4. Набор событий H_1, H_2, … H_k, удовлетворяющих условиям

(1) $H_1 + H_2 + \cdots + H_k = \Omega$;

(2) Для любых $i \neq j$ H_i и H_j несовместны, то есть $H_i \cdot H_j = \emptyset$,

называется *полной группой несовместных событий*.

Пример 10. В перекидном календаре за 2019 год случайным образом выбирается страница с месяцем, а потом случайно выбирается день. Какова вероятность того, что будет выбрано 29 число?

Решение. Заметим, что не имеет смысла рассматривать каждый месяц отдельно. Пусть H_1 = {в месяце 28 дней}, H_2 = {в месяце 30 дней}, H_3 = {в месяце 31 день}, тогда события H_1, H_2 и H_3 образуют полную группу несовместных событий, причём $\mathbf{P}(H_1) = \frac{1}{12}$, $\mathbf{P}(H_2) = \frac{4}{12}$, $\mathbf{P}(H_3) = \frac{7}{12}$.

Событие $A = \{$выбрано 29 число$\}$ представим в виде суммы трех несовместных слагаемых

$$A = A \cdot \Omega = A \cdot (H_1 + H_2 + H_3) = AH_1 + AH_2 + AH_3$$

События AH_1, AH_2 и AH_3 несовместны как части попарно несовместных событий. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AH_1 + AH_2 + AH_3) = \mathbf{P}(AH_1) + \mathbf{P}(AH_2) + \mathbf{P}(AH_3) = \\ = \mathbf{P}(A|H_1) \cdot \mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(A|H_2) \cdot \mathbf{P}(H_2) + \mathbf{P}(A|H_3) \cdot \mathbf{P}(H_3) = \\ = 0 \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{30} \cdot \frac{4}{12} + \frac{1}{31} \cdot \frac{7}{12} = \frac{4 \cdot 31 + 7 \cdot 30}{12 \cdot 30 \cdot 31} = \frac{124 + 210}{12 \cdot 30 \cdot 31} \\ = \frac{167}{5580} \approx 0{,}03.\end{aligned}$$

Обобщим приведенное выше. Если вероятность события A напрямую посчитать затруднительно, то можно воспользоваться следующим утверждением.

Утверждение (Формула полной вероятности). Пусть имеется H_1, H_2, … H_k – полная группа несовместных событий и событие A. Причем вероятности H_i известны, а также известны условные вероятности $\mathbf{P}(A|H_i)$, тогда вероятность любого события можно вычислить по формуле

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|H_1) \cdot \mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(A|H_2) \cdot \mathbf{P}(H_2) + \dots + \mathbf{P}(A|H_k) \cdot \mathbf{P}(H_k).$$

Доказательство. Проведите рассуждения аналогично полученным в примерах 37 и 38.

Пример 11. Имеются две партии изделий: 12 и 10 штук. В каждой партии одно изделие бракованное. Из первой партии во вторую переложили одно изделие. Из второй партии достали одно изделие. Найти вероятность того, что это изделие бракованное.

Решение.

Пусть $H_1 = \{$ из первой партии во вторую переложили хорошее изделие $\}$, $H_2 = \{$ из первой партии во вторую переложили бракованное изделие $\}$, тогда события H_1 и H_2 образуют полную группу несовместных событий, причём $\mathbf{P}(H_1) = \frac{11}{12}$, $\mathbf{P}(H_2) = \frac{1}{12}$.

Если из первой партии во вторую переложили хорошее изделие, то во второй партии будет одно бракованное изделие из 11, в случае, если из первой партии во вторую переложили бракованное изделие, то во второй партии будет два бракованных изделия из 11.

Вероятность события $A = \{$ достали бракованное изделие $\}$ найдем по формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|H_1) \cdot \mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(A|H_2) \cdot \mathbf{P}(H_2) = \frac{1}{11} \cdot \frac{11}{12} + \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{12} = \frac{13}{132} \approx 0{,}10.$$

Пример 12. В урне имеется n шаров. В неё добавили один белый шар. Найти вероятность того, что наугад вынутый из урны шар – белый, если изначальное количество белых шаров в урне равновероятно.

Решение.

Пусть H_i = { в урне изначально было i шаров }, $i = 0, 1, \dots, n$, тогда события H_0, H_1 … H_n образуют полную группу несовместных событий, причём $\mathbf{P}(H_i) = \frac{1}{n+1}$.

Вероятность события A = { достали белый шар } найдем по формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(A|H_i) \cdot \mathbf{P}(H_i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i+1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2\cdot(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

Формула Байеса

Пример 13. Есть три завода, производящих одну и ту же продукцию. Первый завод производит 25 %, второй завод – 35 %, а третий – 40 % всей продукции. Брак составляет 5 % от продукции первого завода, 3 % от продукции второго завода и 4 % от продукции третьего завода. Вся продукция смешивается и поступает в продажу. Найти
а) вероятность купить бракованное изделие,
б) вероятность того, что купленное изделие изготовлено первым заводом, при условии, что это изделие оказалось бракованным.

Решение.

а) Пусть событие A = {куплено бракованное изделие}, а в качестве гипотез возьмем H_1 = { изделие изготовлено первым заводом }, H_2 = { изделие изготовлено вторым заводом }, H_3 = { изделие изготовлено третьим заводом }, тогда по условию $\mathbf{P}(H_1) = 0{,}25$, $\mathbf{P}(H_2) = 0{,}35$, $\mathbf{P}(H_3) = 0{,}40$, $\mathbf{P}(A|H_1) = 0{,}05$, $\mathbf{P}(A|H_2) = 0{,}03$, $\mathbf{P}(A|H_3) = 0{,}04$. Тогда по формуле полной вероятности получим

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|H_1)\cdot\mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(A|H_2)\cdot\mathbf{P}(H_2) + \mathbf{P}(A|H_3)\cdot\mathbf{P}(H_3) =$$
$$= 0{,}05\cdot 0{,}25 + 0{,}03\cdot 0{,}35 + 0{,}04\cdot 0{,}40 = 0{,}04.$$

б) Здесь от нас требуют найти вероятность гипотезы H_1 при условии, что событие A произошло, то есть $\mathbf{P}(H_1|A)$. Воспользуемся формулой условной вероятности

$$\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(H_1\cdot A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A|H_1)\cdot\mathbf{P}(H_1)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{0{,}05\cdot 0{,}25}{0{,}039} = 0{,}32.$$

Обобщим полученный результат.

Пусть имеются события $H_1, H_2, \dots, H_k$, образующие полную группу несовместных событий и событие A, имеющее ненулевую вероятность. Тогда условная вероятность того, что имело место событие H_i, если в результате эксперимента наблюдалось событие A, может быть вычислена по формуле

$$\boldsymbol{P}(H_i|A) = \frac{\boldsymbol{P}(A|H_i)\cdot\boldsymbol{P}(H_i)}{\boldsymbol{P}(A|H_1)\cdot\boldsymbol{P}(H_1) + \dots + \boldsymbol{P}(A|H_k)\cdot\boldsymbol{P}(H_k)}.$$

Доказательство.

Достаточно применить формулу условной вероятности для вычисления вероятности события $H_i|A$ и формулу полной вероятности для вычисления вероятности события A.

Вероятности $\boldsymbol{P}(H_i)$ называются *априорными* («до опыта»), а вероятности $\boldsymbol{P}(H_i|A)$ – *апостериорными* вероятностями («после опыта»). Формула Байеса позволяет переоценить заранее известные вероятности после того, как получено знание о результате эксперимента. Эта формула имеет многочисленные применения в статистике, машинном обучении, социологии и т.п.

Пример 14. Два стрелка подбрасывают монетку и выбирают, кто из них будет стрелять по мишени. Первый стрелок попадает по мишени с вероятностью 1, а второй – с вероятностью 10^{-5}. Как изменятся вероятности выбора стрелков если известно, что пуля попала в мишень?

Решение.

Пусть $H_1 = \{$ по мишени стрелял первый стрелок $\}$, $H_2 = \{$ по мишени стрелял второй стрелок $\}$, тогда события H_1 и H_2 образуют полную группу несовместных событий, причём $\mathbf{P}(H_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(H_2) = \frac{1}{2}$.

Вероятность события $A = \{$ пуля попала в мишень $\}$ найдем по формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|H_1) \cdot \mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(A|H_2) \cdot \mathbf{P}(H_2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 10^{-5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{100001}{200000},$$

$$\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_1) \cdot \mathbf{P}(H_1)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot \frac{1}{2} + 10^{-5} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{100000}{100001} \approx 0{,}99999,$$

$$\mathbf{P}(H_2|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_2) \cdot \mathbf{P}(H_2)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{10^{-5} \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot \frac{1}{2} + 10^{-5} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{100001} \approx 0{,}00001.$$

Таким образом, попадание пули существенно изменило вероятности выбора стрелков.

Пример 15. Имеются две партии изделий: 12 и 10 штук. В каждой партии ровно одно изделие бракованное. Из первой партии во вторую переложили одно изделие. После этого из второй партии наугад достали изделие, которое оказалось бракованным. Какое изделие вероятнее всего переложили из первой партии во вторую?

Решение.

В примере 33 мы вычислили вероятность события $A = \{$ достали бракованное изделие $\}$. Нужно найти $\mathbf{P}(H_1|A)$ и $\mathbf{P}(H_2|A)$.

$$\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_1) \cdot \mathbf{P}(H_1)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\frac{1}{11} \cdot \frac{11}{12}}{\frac{13}{132}} = 0{,}85,$$

$$\mathbf{P}(H_2|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_2) \cdot \mathbf{P}(H_2)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\frac{2}{11} \cdot \frac{1}{12}}{\frac{13}{132}} = 0{,}15.$$

По результатам расчетов можно понять, что вероятнее переложили хорошее изделие.

Пример 16. Попадание случайной точки в любое место области S равновозможно, а область S состоит из четырех частей, составляющих соответственно 50, 30, 12 и 8% всей области. При испытании имело место событие A, которое происходит только при попадании случайной точки в каждую из этих частей с вероятностями соответственно 0,01, 0,05, 0,2 и 0,5. В какую из частей области S вероятнее всего произошло попадание?

Решение.

Пусть H_1 = {точка попала в первую область}, H_2 = {точка попала в первую область}, H_3 = {точка попала в первую область}, H_4 = {точка попала в первую область}, тогда $\mathbf{P}(H_1) = 0{,}50$, $\mathbf{P}(H_2) = 0{,}30$, $\mathbf{P}(H_3) = 0{,}12$, $\mathbf{P}(H_4) = 0{,}08$, $\mathbf{P}(A|H_1) = 0{,}01$, $\mathbf{P}(A|H_2) = 0{,}05$, $\mathbf{P}(A|H_3) = 0{,}2$, $\mathbf{P}(A|H_4) = 0{,}5$. Тогда по формуле полной вероятности получим

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|H_1) \cdot \mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(A|H_2) \cdot \mathbf{P}(H_2) + \mathbf{P}(A|H_3) \cdot \mathbf{P}(H_3) + \mathbf{P}(A|H_4) \cdot \mathbf{P}(H_4) = 0{,}01 \cdot 0{,}5 + 0{,}05 \cdot 0{,}30 + 0{,}2 \cdot 0{,}12 + 0{,}5 \cdot 0{,}08 = 0{,}084.$$

Найдем вероятности $\mathbf{P}(H_1|A)$, $\mathbf{P}(H_2|A)$, $\mathbf{P}(H_3|A)$ и $\mathbf{P}(H_4|A)$. Воспользуемся формулой условной вероятности

$$\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_1) \cdot \mathbf{P}(H_1)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}5}{0{,}084} = 0{,}0595,$$

$$\mathbf{P}(H_2|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_2) \cdot \mathbf{P}(H_2)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}3}{0{,}084} = 0{,}1786,$$

$$\mathbf{P}(H_3|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_3) \cdot \mathbf{P}(H_3)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}12}{0{,}084} = 0{,}2857,$$

$$\mathbf{P}(H_4|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_4) \cdot \mathbf{P}(H_4)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}08}{0{,}084} = 0{,}4762.$$

Заметим, что наиболее вероятным было попадание в четвертую область.

Повторные независимые опыты

Схемой Бернулли называется последовательность независимых в совокупности испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода: «успех» и «неудача», при этом успех в одном испытании происходит с вероятностью p, а неудача с вероятностью $q = 1 - p$.

Под независимостью в совокупности испытаний подразумевают независимость в совокупности любых событий, относящихся к разным испытаниям.

Пусть τ – номер первого успешного испытания. Тогда

$$\mathbf{P}(\tau = k) = pq^{k-1}.$$

Пример 17. Стрелок стреляет по мишени до первого попадания. Вероятность того, что при одном выстреле он попадет в мишень равна 0,7. Найти вероятность того, что он сделает ровно 4 выстрела.

Решение. Каждый выстрел – опыт, вероятность успеха – 0,7, вероятность неудачи – 0,3. Тогда вероятность того, что до первого успеха будет проведено ровно 4 опыта равна $\mathbf{P}(\tau = 4) = 0{,}7 \cdot 0{,}3^3 = 0{,}0189$.

Утверждение. Пусть $\mathbf{P}(\tau = k) = pq^{k-1}$ для любого $k \in \boldsymbol{N}$. Тогда для любых неотрицательных чисел n и k имеет место равенство

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau} > \boldsymbol{n} + \boldsymbol{k} \mid \boldsymbol{\tau} > \boldsymbol{n}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau} > \boldsymbol{k}).$$

Доказательство.

По определению условной вероятности

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau} > \boldsymbol{n} + \boldsymbol{k} \mid \boldsymbol{\tau} > \boldsymbol{n}) = \frac{\mathbf{P}\big((\boldsymbol{\tau} > \boldsymbol{n} + \boldsymbol{k}) \cdot (\boldsymbol{\tau} > \boldsymbol{n})\big)}{\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau} > \boldsymbol{n})} = \frac{\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau} > \boldsymbol{n} + \boldsymbol{k})}{\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau} > \boldsymbol{n})} =$$

$$= \frac{q^{n+k}}{q^n} = q^k = \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau} > k).$$

Формула Бернулли. Пусть было проведено n независимых в совокупности опытов с вероятностью успеха p, ξ – число успешных опытов из n. Тогда для $k = 0,1, \dots, n$ имеет место равенство

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Доказательство.

Пусть событие A = { опыт закончился успехом }. A_i = { в i-ом опыте произошло событие A }.

Событие ($\xi = k$) – в n испытаниях схемы Бернулли событие A появилось ровно k раз. Благоприятными этому событию будут последовательности исходов n опытов, среди которых ровно k успешных. Таких последовательностей $\binom{n}{k}$.

Одной из таких последовательностей будет, например, событие

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k \cdot \overline{A_{k+1}} \cdot \overline{A_{k+2}} \cdot \dots \cdot \overline{A_n}$$

Найдем вероятность этого события

$$\mathbf{P}\big(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k \cdot \overline{A_{k+1}} \cdot \overline{A_{k+2}} \cdot \dots \cdot \overline{A_n}\big) =$$

$$= \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(A_k) \cdot \mathbf{P}\big(\overline{A_{k+1}}\big) \cdot \mathbf{P}\big(\overline{A_{k+2}}\big) \cdot \dots \cdot \mathbf{P}\big(\overline{A_n}\big) =$$

$$= \underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{k \text{ множителей}} \cdot \underbrace{(1-p) \cdot (1-p) \cdot \dots \cdot (1-p)}_{n-k \text{ множителей}} = p^k (1-p)^{n-k}.$$

Заметим, что вероятности остальных последовательностей опытов, состоящих ровно из k успехов имеют те же вероятности, при этом данные события несовместны, поэтому

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Обычно вводят обозначение $q = 1 - p$, и формулу можно переписать в виде

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Для удобства введем обозначение $\mathbf{P}_p(n, k)$.

Пример 18. Восьмеричный код длины 10 генерируется случайно. Найти вероятность того, что в нем будет ровно два нуля? Хотя бы два нуля?

Решение.

Здесь независимые опыты – генерируемые символы, а вероятность появления нуля равна 1/8. Тогда нам нужно найти $\mathbf{P}_{\frac{1}{8}}(10, 2)$.

По формуле Бернулли получим $\mathbf{P}_{\frac{1}{8}}(10,2)=\binom{10}{2}\frac{1^2}{8}\frac{7^8}{8}=0{,}24.$

$\mathbf{P}_{\frac{1}{8}}(10,\geq 2)=1-\mathbf{P}_{\frac{1}{8}}(10,1)-\mathbf{P}_{\frac{1}{8}}(10,0)=1-\binom{10}{1}\frac{1^1}{8}\frac{7^9}{8}-\binom{10}{0}\frac{1^0}{8}\frac{7^{10}}{8}=$
$=1-0{,}38-0{,}26=0{,}36.$

Пример 19. Вероятность отказа любого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее: отказ двух приборов из четырех или трех из шести?

Решение.

Опыт – испытание прибора. Сравним $\mathbf{P}_{0,4}(4,2)$ и $\mathbf{P}_{0,4}(6,3)$.

$$\mathbf{P}_{0,4}(4,2)=\binom{4}{2}0{,}4^2 0{,}6^2=0{,}3456,$$

$$\mathbf{P}_{0,4}(6,3)=\binom{6}{3}0{,}4^3 0{,}6^3=0{,}27648.$$

Таким образом, вероятность отказа двух приборов из четырех выше, чем вероятность отказа трех из шести.

Свойства формулы Бернулли:

1. Правая часть формулы представляет собой общий член разложения бинома Ньютона.

Просуммируем вероятности для $k=0,1,\dots,n$, тогда получим

$$\sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{n}}\mathbf{P}_p(n,k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1^n=1.$$

2. Для $\mathbf{P}_p(n,k)$ можно записать рекуррентное соотношение

$$\mathbf{P}_p(n,k+1)=\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{q}\cdot\boldsymbol{P}_p(n,k).$$

3. Число k_0, которому соответствует максимальная вероятность $\boldsymbol{P}_p(n,k_0)$, называется наивероятнейшим числом успехов и определяется неравенствами

$$np-q\leq k_0\leq np+p.$$

Доказательство.

Если k_0 – наивероятнейшее число успехов, то для него выполнены неравенства

$$\begin{cases}\mathbf{P}_p(n,k_0)\geq\mathbf{P}_p(n,k_0+1)\\ \mathbf{P}_p(n,k_0)\geq\mathbf{P}_p(n,k_0-1)\end{cases},$$

Подставим равенства, полученные в (2).

$$\begin{cases}\dfrac{\mathbf{P}_p(n,k_0+1)}{\mathbf{P}_p(n,k_0)}=\dfrac{n-k_0}{k_0+1}\cdot\dfrac{p}{q}\leq 1\\ \dfrac{\mathbf{P}_p(n,k_0)}{\mathbf{P}_p(n,k_0-1)}=\dfrac{n-k_0+1}{k_0-1+1}\cdot\dfrac{p}{q}\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(n-k_0)\cdot p\leq(k_0+1)\cdot q\\ (n-k_0+1)\cdot p\geq k_0\cdot q\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(p+q)\cdot k_0\geq np-q\\ (p+q)\cdot k_0\leq np+p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k_0\geq np-q\\ k_0\leq np+p\end{cases}.$$

На промежутке $[np-q, np+p]$ может лежать одно или два целых числа. Если данному промежутку принадлежат два целых числа, то имеется два равновероятных числа успехов.

4. Вероятность $\boldsymbol{P}_p(n, 1 \le k \le n)$ того, что в n опытах событие A появится хотя бы один раз равна

$$\boldsymbol{P}_p(n, 1 \le k \le n) = 1 - \boldsymbol{P}_p(n, 0) = 1 - q^n.$$

Формула Пуассона

При большом числе опытов точное вычисление по формуле Бернулли становится затруднительным, поэтому в этих случаях вместо формулы Бернулли используют её приближённые значения.

Если количество испытаний велико $n \to \infty$, а вероятность события мала $p \to 0$, так что $np \to \lambda \le 10$ и $p \ll \frac{1}{\sqrt{n}}$, то вероятности в схеме Бернулли можно вычислять по *формуле Пуассона*

$$\mathbf{P}_p(n, k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Утверждение. Если $np \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$, то

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Пример 20. Вероятность, что изделие не выдержит испытания равна 0,005. Найти вероятность того, что из 600 изделий больше двух не выдержат испытания.

Решение.

$n = 600, p = 0{,}005, k > 2, np = 600 \cdot 0{,}005 = 3.$

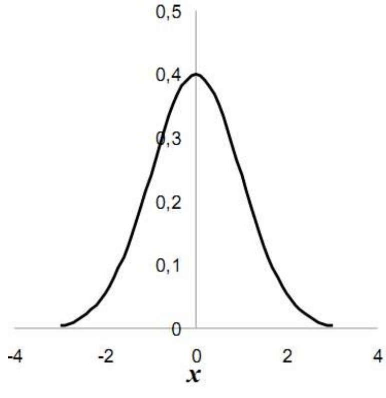
$\mathbf{P}_{0,005}(600, > 2) = 1 - \mathbf{P}_{0,005}(600, 2) - \mathbf{P}_{0,005}(600, 1) - \mathbf{P}_{0,005}(600, 0) \approx$
$\approx 1 - \frac{3^2}{2!} e^{-3} - \frac{3^1}{1!} e^{-3} - - \frac{3^0}{0!} e^{-3} = 1 - 0{,}224 - 0{,}149 - 0{,}050 = 0{,}577.$

Кривая Гаусса и функция Лапласа

Введем функцию $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Она четная и неотрицательная.

График этой функции – *кривая Гаусса* – приведена на рисунке.



Рассмотрим

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Функция $\Phi(x)$ – *функция Лапласа*, ее значения можно найти в специальных таблицах. График функции Лапласа приведен на рисунке

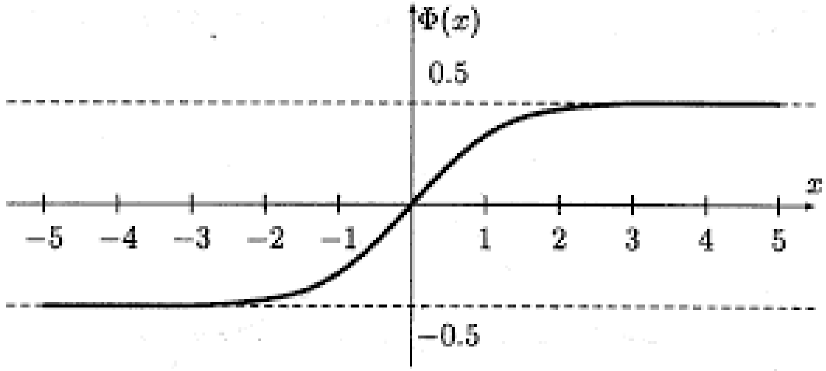


Рис. 1. График функции Лапласа

Также значение

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

можно вычислить в MS Excel с использованием функции НОРМ.РАСП.СТ(x, 1).

Замечание. Обратите внимание, что $\Phi^*(x)$ больше, чем $\Phi(x)$ на 0,5.

Свойства функции Лапласа:

1. $\Phi(x)$ =0;

2. $\Phi(-x) = \Phi(x)$, то есть функция нечётная;

3. $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 0{,}5$.

Теоремы Лапласа

1. Локальная теорема Лапласа (Муавра-Лапласа)

Если число испытаний велико, а вероятность события отделена от единицы (0,1 < p < 0,9), то вероятности в схеме Бернулли можно вычислять по локальной формуле Лапласа

$$\mathbf{P}_p(n,k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Пример 21. Вероятность получения с конвейера изделия первого сорта равна 0,9. Определить вероятность того, что из взятых наудачу 600 изделий 530 будут первого сорта.

Решение.

$n = 600, p = 0{,}9, k = 530, np = 600 \cdot 0{,}9 = 540.$

$$\mathbf{P}_{0,9}(600, 530) \approx \frac{1}{\sqrt{600\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{530-540}{\sqrt{600\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}\right)^2} = 0{,}0085.$$

2. Интегральная формула Лапласа

Если требуется найти вероятность того, что событие произошло не менее k_1 раз, но не более k_2 раз, то используется интегральная формула Муавра-Лапласа

$$\mathbf{P}_p(n, k_1 \leq \xi \leq k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Пример 22. Вероятность попадания в мишень 0,7. Стрелок произвел 100 выстрелов по мишени. Определить вероятность того, что число попаданий будет больше 75, но меньше 90.

Решение.

$n = 100, p = 0{,}7, 75 < k < 90,$

$np = 100 \cdot 0{,}7 = 70, npq = 100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 21.$

$$\mathbf{P}_{0,9}(100, 75 \leq \xi \leq 90) \approx \Phi\left(\frac{90 - 70}{\sqrt{21}}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 70}{\sqrt{21}}\right) =$$
$$= \Phi(4{,}36) - \Phi(1{,}09) = 0{,}5000 - 0{,}3621 = 0{,}1379.$$

Литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2000.
2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1999.
3. Мхитарян, В. С. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / В. С. Мхитарян, В. Ф. Шишов, А. Ю. Козлов. – М.: Академия, 2012.
4. Тарасов, Л. В. Мир, построенный на вероятности / Л. В. Тарасов. – М.: Просвещение, 1984.
5. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и её приложения / В. Феллер. – М.: Мир, 1984.