Повторные независимые опыты. Формула Бернулли

1. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что для запуска двигателя потребуется включать зажигание не более трех раз.

Решение.

Двигатель придется включать не более трех раз в случае, если он начнет работать с первого, со второго или с третьего раза.

Пусть событие A = { двигатель придется включать не более трех раз }, B_i ={ в i-ый раз двигатель начнет работать }.

Тогда $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\left(B_1 + \overline{B_1} \cdot B_2 + \overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot B_3\right) = \mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}\left(\overline{B_1} \cdot B_2\right) +$
$+\mathbf{P}\left(\overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot B_3\right) = \mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}\left(\overline{B_1}\right) \cdot \mathbf{P}(B_2) + \mathbf{P}\left(\overline{B_1}\right) \cdot \mathbf{P}\left(\overline{B_2}\right) \cdot \mathbf{P}(B_3) =$
$= 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}999.$

Ответ: 0,999.

2. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,1. Найти вероятность того, что сообщение из 10 знаков

а) не будет искажено;

б) содержит ровно 3 искажения;

в) содержит не менее трех искажений.

Решение.

Пусть успех – знак искажен, тогда имеем схему Бернулли с вероятностью успеха $p = 0{,}1$ и вероятностью неудачи $q = 0{,}9$.

а) $\mathbf{P}(10,\ 0) = \binom{10}{0} 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{10} = 0{,}349;$

б) $\mathbf{P}(10,\ 3) = \binom{10}{3} 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^7 = 0{,}057;$

в) $\mathbf{P}(10,\ \geq 3) = 1 - \mathbf{P}(10,\ < 3) = 1 - \mathbf{P}(10,\ 0) - \mathbf{P}(10,\ 1) -$
$\mathbf{P}(10,\ 2) = 1 - \binom{10}{0} 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{10} - \binom{10}{1} 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^9 - \binom{10}{2} 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^8 = 1 -$
$-0{,}349 - 0{,}387 - 0{,}194 = 0{,}07.$

Ответ: а) 0,349, б) 0,057, в) 0,07.

3. Вероятность искажения одного знака при передаче сообщения равна 0,15. Найти наивероятнейшее число искаженных знаков в сообщении длины 10.

Решение.

Наивероятнейшее число исходов x_0 находится на промежутке

$$10 \cdot 0{,}15 - 0{,}85 = np - q \le x_0 \le np + p = 10 \cdot 0{,}15 + 0{,}15$$

$$0{,}65 \le x_0 \le 1{,}65$$

На данном промежутке находится ровно одно целое число $x_0 = 1$.

Ответ: наивероятнейшее число искаженных знаков равно 1.

4. Сколько нужно взять случайных цифр, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей 0,95, цифра 2 появилась хотя бы один раз?

Решение.

Вероятность появления цифры 2 равна 0,1.

Пусть было взято n цифр. $\mathbf{P}(n,\ \ge 1) = 1 - \mathbf{P}(n,\ 0) = 1 - 0{,}9^n$

По условию $1 - 0{,}9^n \ge 0{,}95$, тогда $0{,}9^n \le 0{,}05$. Отсюда найдем $n \ge 29$.

Ответ: нужно взять не менее 29 случайных цифр.

5. При формировании группы для проведения специального социологического опроса необходимо отобрать 10 человек, удовлетворяющих определенным требованиям. Вероятность того, что наугад выбранный человек удовлетворяет этим требованиям, равна 0,2. Найти вероятность того, что при отборе придется тестировать ровно 20 человек.

Решение.

При отборе придется тестировать ровно 20 человек в случае, если среди первых 19 подойдет ровно 9 человек, а 20 обязательно подойдет.

Искомая вероятность $P = \binom{19}{9} 0{,}2^9 \cdot 0{,}8^{10} \cdot 0{,}2 = 0{,}001$

Ответ: 0,001.