Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса

1. Брошены две различимые игральные кости. Найти вероятность того, что на первой кости выпало четыре очка, если известно, что на второй кости выпало больше очков, чем на первой.

Решение.

Элементарный исход данного опыта – упорядоченная пара значений, выпавших на игральных костях. Всего в опыте 36 равновероятных элементарных исходов.

После того, как стало известно, что произошло событие A = { на второй кости выпало больше очков, чем на первой }, количество элементарных исходов сократилось до $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ исходов. Из этих исходов благоприятны событию B = { на первой кости выпало 4 очка } исходы {4, 1}, {4, 2} и {4, 3}. Таким образом, вероятность события $\mathbf{P}(B|A) = \frac{3}{15} = 0.2$.

Ответ: 0,2.

2. Студенты сдавали экзамен по математическому анализу и по алгебре. Известно, что алгебру сдали $\frac{3}{4}$ студентов, сдавших математический анализ, а математический анализ сдали $\frac{2}{3}$ студентов, сдавших алгебру. Каких студентов было больше: сдавших алгебру или математический анализ?

Решение.

Пусть событие A = { случайно выбранный студент сдал экзамен по математическому анализу }, а событие B = { случайно выбранный студент сдал экзамен по алгебре }.

$\frac{3}{4}$ студентов, сдавших математический анализ, сдали и алгебру. То есть вероятность того, что студент, сдавший математический анализ, сдаст и алгебру равна $\frac{3}{4} = \mathbf{P}(B|A)$.

Аналогично, вероятность того, что студент, сдавший алгебру, сдаст и математический анализ равна $\frac{2}{3} = \mathbf{P}(A|B)$.

Нужно сравнить вероятности событий А и В.

По формуле условной вероятности $\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)}$, а $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}$.

Из обоих уравнений выразим $\mathbf{P}(AB)$, получим

$$\mathbf{P}(B|A) \cdot \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|B) \cdot \mathbf{P}(B),$$

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \cdot \mathbf{P}(A) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{P}(B),$$

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{9}} \cdot \mathbf{P}(B).$$

Из последнего равенства делаем вывод о том, что вероятность события А меньше вероятности события В, а значит количество сдавших математический анализ меньше, чем количество сдавших алгебру.

Ответ: сдавших алгебру больше, чем сдавших математический анализ.

3. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго – 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) стандартна.

Решение.

Пусть событие $H_1 =$\{ Деталь взята из первого набора \}, $H_2 =$\{ Деталь взята из второго набора \}. Так как деталь берется из наудачу выбранного набора, то $\mathbf{P}(H_1) = \mathbf{P}(H_2) = \frac{1}{2}$.

Событие $A =$\{ взятая наудачу деталь стандартна \}, тогда по формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AH_1 + AH_2) = \mathbf{P}(AH_1) + \mathbf{P}(AH_2) =$$
$$= \mathbf{P}(A|H_1) \cdot \mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(A|H_2) \cdot \mathbf{P}(H_2) =$$
$$= 0{,}8 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}9 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}85$$

Ответ: 0,85.

4. Есть три завода, производящих одну и ту же продукцию. Первый завод производит 25 %, второй завод – 35 %, а третий – 40 % всей продукции. Брак составляет 5 % от продукции первого завода, 3 % от продукции второго завода и 4 % от продукции третьего завода. Вся продукция смешивается и поступает в продажу. Куплено бракованное изделие. Какова вероятность, что оно произведено первым заводом?

Решение.

Введем три гипотезы $H_1 =\{$ изделие произведено первым заводом $\}$, $H_2 =\{$ изделие произведено вторым заводом $\}$, $H_3 =\{$ изделие произведено третьим заводом $\}$. Эти события образуют полную группу несовместных событий, причём $\mathbf{P}(H_1) = 0{,}25$, $\mathbf{P}(H_2) = 0{,}35$, $\mathbf{P}(H_3) = 0{,}4$.

Событие $A =\{$ куплено бракованное изделие $\}$.

Требуется найти $\mathbf{P}(H_1|A)$.

По формуле Байеса запишем $\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(H_1)\cdot\mathbf{P}(A|H_1)}{\mathbf{P}(A)}$. Вероятности в числителе нам известны, вероятность события А найдем по формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AH_1 + AH_2 + AH_3) = \mathbf{P}(AH_1) + \mathbf{P}(AH_2) + \mathbf{P}(AH_3) =$$
$$= \mathbf{P}(A|H_1)\cdot\mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(A|H_2)\cdot\mathbf{P}(H_2) + \mathbf{P}(A|H_3)\cdot\mathbf{P}(H_3) =$$
$$= 0{,}05\cdot 0{,}25 + 0{,}03\cdot 0{,}35 + 0{,}04\cdot 0{,}4 = 0{,}039$$

Тогда

$$\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(H_1)\cdot\mathbf{P}(A|H_1)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{0{,}05\cdot 0{,}25}{0{,}039} \approx 0{,}32.$$

Ответ: 0,32.