Случайные события. Основные формулы теории вероятностей (часть 1)

Содержание

Случайные события

Опыт (*эксперимент*) – воспроизводимая совокупность условий, в которых фиксируется тот или иной результат.

В дальнейшем все события будем рассматривать в рамках некоторого идеального опыта.

Пространство элементарных исходов

Определение 1. *Пространством элементарных исходов* называют множество Ω, содержащее все возможные взаимоисключающие результаты данного случайного эксперимента. Элементы множества Ω – *элементарные исходы*.

Пример 1. Подбрасывается правильная монета. В результате может выпасть орел или решка. Пространство элементарных исходов для данного опыта будет множество $\Omega = \{\text{выпал орел}, \text{выпала решка}\}$. Заранее невозможно предугадать, какой именно стороной ляжет монета, поэтому данный опыт можно считать опытом со случайным исходом.

Пространство элементарных исходов *дискретное*, если множество Ω конечное или счётное. Если множество Ω состоит из объединения интервалов, то пространство – *непрерывное*.

Определение 2. *Событие* – подмножество множества Ω. Говорят, что произошло событие A, если эксперимент завершился одним из элементарных исходов, входящих в множество A.

Замечание. Не любое подмножество множества Ω можно считать событием (об этом будет сказано позже).

Пример 2. Один раз подбрасывают игральную кость (кубик). В данном опыте элементарным исходом можно считать число выпавших очков. Пространством элементарных исходов для данного опыта будет множество $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Событие $A = \{1, 5\}$ произойдет, если выпадет единица или пятерка, событие $B = \{2, 4, 6\}$ означает, что выпадет четное число очков, а событие $C = \{6\}$ состоит из одного элементарного исхода и означает появление шести очков.

В данном опыте все элементарные исходы можно считать равновозможными вследствие симметричности игральной кости.

Пример 3. Подбрасываются черная и белая игральные кости. Здесь элементарный исход – пара (i, j), где i – число очков, выпавшее на черной кости, а j – на белой. Тогда пространство элементарных исходов для данного опыта – множество пар, где i и j могут принимать значения от 1 до 6. Таким образом, в данном опыте может произойти один из 36 элементарных исходов:

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & \dots (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \dots (2,6) \\ \dots & \dots & \dots \\ (6,1) & (6,2) & \dots (6,6) \end{matrix}$$

Заметим, что для симметричных костей все эти 36 исходов равновозможны.

Событие «на белой кости выпадет одно очко» можно записать так: $A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\}$, а событие $B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$ означает, что сумма выпавших очков равна 6, событие $C = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$ – сумма выпавших очков меньше или равна четырём, а событие $D = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ – на костях выпадет одинаковое число очков.

Пример 4. Подбрасываются две неразличимые игральные кости. В данном случае не различают пары (1, 2) и (2, 1), поэтому опыт имеет лишь 21 элементарный исход:

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & \dots (1,6) \\ & (2,2) & \dots (2,6) \\ \dots & \dots & \dots \\ & & (6,6) \end{matrix}$$

Стоит отметить, что в данном случае исходы не будут равновозможными. Исход (1, 2) будет происходить в два раза чаще, чем исход (1, 1).

Теперь событие «на первой кости выпадет одно очко» не имеет смысла, а событие $A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\}$ означает, что «хотя бы на одной из костей выпадет 1». Событие «сумма выпавших очков равна шести» будет состоять уже из трех исходов $B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3)\}$, а событие «на костях выпадет одинаковое число очков» не изменится.

Пример 5. В круг радиуса R наудачу бросается монета радиуса r. В качестве элементарного исхода рассмотрим положение центра монеты внутри круга. Пространством элементарных исходов в данном случае будет множество всех точек круга, где может располагаться центр монеты, а событием, например, будет попадание центра монеты внутрь вписанного в круг правильного треугольника или попадание центра монеты на окружность радиуса $R/2$.

В примере 5 пространство элементарных исходов непрерывное.

Рассмотрим ещё несколько известных примеров.

Пример 6. Монета подбрасывается последовательно до тех пор, пока не выпадет вверх орлом. В качестве элементарного исхода можно рассмотреть номер броска, на котором выпал орел. $\omega_i = i,\ i \in \boldsymbol{N}$. В данном случае пространство элементарных исходов Ω является счётным, при этом элементарные исходы не будут равновероятными. В качестве события можно рассмотреть, например, событие «герб выпал при броске с чётным номером», которому соответствует множество $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$.

Пример 7. В урне лежит один чёрный и два белых шара. Из коробки наугад достают один шар.

В данном примере можно рассмотреть два различных пространства элементарных исходов. Первое состоит из двух исходов $\Omega_1 = \{б, ч\}$. В данном пространстве исходы не являются равновероятными. Если пронумеровать белые шары, то пространство элементарных исходов $\Omega_2 = \{б_1, б_2, ч\}$ будет состоять из равновозможных исходов.

Пример 8. В урне лежит один чёрный и два белых шара. Из коробки наугад достают два шара. Чтобы исходы оказались равновозможными занумеруем шары. Тогда пространство элементарных исходов $\Omega = \{(б_1, б_2), (б_1, ч), (б_2, ч)\}$ будет состоять из трех равновозможных исходов.

Событию «вынуты разноцветные шары» соответствуют элементарные исходы $\omega_2 = (б_1, ч)$ и $\omega_3 = (б_2, ч)$.

Стоит обратить внимание, что здесь важно, что шары вынимаются одновременно, то есть порядок следования шаров не важен. Если бы шары вытаскивались по очереди, то пространство элементарных исходов состояло бы из шести исходов: $\Omega = \{(б_1, б_2), (б_2, б_1), (б_1, ч), (ч, б_1), (б_2, ч), (ч, б_2)\}$.

<u>Замечание</u>. При решении задач стоит помнить, что порядок проведения эксперимента может влиять на вероятности событий.

Алгебра событий

Выделим среди подмножеств Ω два особых события.

Определение 3. *Событие называется достоверным, если в результате опыта оно произойдет обязательно (совпадает с множеством всех элементарных исходов). Достоверное событие будем обозначать* Ω.

Определение 4. *Событие невозможное, если в результате опыта оно никогда не происходит (пустое множество). Невозможное событие будем обозначать* $\varnothing$.

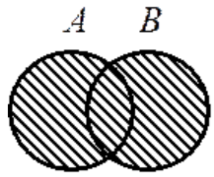
В примере 2 в качестве достоверного события можно рассмотреть событие $D = \{$выпадет число, меньшее 10$\}$, а в качестве невозможного – событие $E = \{$выпадет 0$\}$.

Операции над событиями

В теории вероятностей рассматривают те же операции над событиями, что и над множествами в теории множеств.

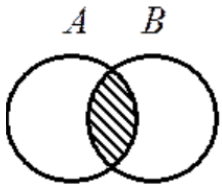
События удобно представлять графически и отображать на диаграммах Эйлера-Венна. Прямоугольником будем обозначать пространство всех элементарных исходов **Ω**, кругами – события (подмножества **Ω**).

Определение 5. *Суммой (или объединением) событий A и B называется событие $C = A + B$, которое происходит тогда и только тогда, когда произошло событие A или произошло событие B. Событие C содержит как элементарные исходы из множества A, так и элементарные исходы из множества B.*



$A + B$

Определение 6. *Произведением (или пересечением) событий A и B называется событие $D = A \cdot B$, которое происходит тогда и только тогда, когда события A и B происходят одновременно. Событие D содержит только те элементарные исходы, которые содержатся в множествах A и B одновременно.*



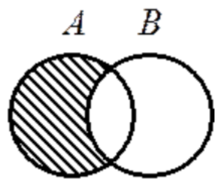
AB

Пример 9. Игральная кость подбрасывается два раза. Событие A – «выпадение в первый раз четверки», событие B – «выпадение восьми очков в сумме за два раза». Перечислить все элементарные исходы, благоприятные событиям A и B. Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию $A \cdot B$. Перечислите все элементарные исходы, благоприятные событию $A + B$.

Решение. Множество элементарных исходов данного опыта состоит из 36 элементов. Каждый элемент – пара (i, j), где i – число очков, выпавшее в первый раз, а j – число очков, выпавшее во второй раз.

Событию A соответствуют элементарные исходы (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5) и (4, 6), а событию B – исходы (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3) и (6, 2). Тогда $A \cdot B = \{(4, 4)\}$, а $A + B = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (2, 6), (3, 5), (5, 3), (6, 2)\}$.

Определение 7. *Разностью событий A и B называется событие $E = A \setminus B$, которое происходит тогда и только тогда, когда произошло событие A, но не произошло событие B. Событие E содержит элементарные исходы, входящие в множество A, но не входящие в множество B.*



$A - B$

Определение 8. *Отрицанием события A (или противоположным к событию A) называется событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$, которое происходит тогда и только тогда, когда событие A не происходит (дополнение). Событие $\overline{A}$ содержит все элементарные исходы, не входящие в множество A.*

Пример 10. Пусть стрелок один раз стреляет по мишени. Тогда события $A = \{$стрелок попал в мишень$\}$ и $B = \{$стрелок промахнулся$\}$ являются противоположными.

Пример 11. Пусть стрелок стреляет по мишени дважды. События $A = \{$стрелок хотя бы один раз попал в мишень$\}$ и $B = \{$стрелок попал в мишень оба раза$\}$ не являются противоположными, так как могут произойти одновременно. Рассмотрим событие C = {стрелок промахнулся оба раза}, тогда события A и C будут противоположными.

Операции над событиями обладают следующими свойствами:

1) $A + B = B + A, A \cdot B = B \cdot A$ – *коммутативность*;

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$,
$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ – *ассоциативность*;

3) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ – *первый дистрибутивный закон*,
$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ – *второй дистрибутивный закон*;

4) $A + A = A, A \cdot A = A$ – *закон поглощения*;

5) $\mathrm{A} + \Omega = \Omega, \mathrm{A} \cdot \Omega = \Omega, \mathrm{A} + \emptyset = \mathrm{A}, \mathrm{A} \cdot \emptyset = \emptyset$;

6) $\mathrm{A} + \overline{\mathrm{A}} = \Omega, \mathrm{A} \cdot \overline{\mathrm{A}} = \Omega$;

7) $\overline{\Omega} = \emptyset, \overline{\emptyset} = \Omega$;

8) $\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \mathrm{A}$ – *закон двойного отрицания*;

9) $A \backslash B = A \cdot \overline{B}$;

10) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ – *законы де Моргана*.

Пример 12. Каждый из двух стрелков производит по одному выстрелу в мишень. Пусть событие A = {первый стрелок попал в цель}, событие B = {второй стрелок попал в цель}.

Что означают события а) $A + B$; б) $A \cdot B$; в) $A \cdot \overline{B}$.

Решение. Составим пространство элементарных исходов для данного опыта: $\Omega = \{\omega_{00}, \omega_{01}, \omega_{10}, \omega_{11}\}$, где ω_{00} – первый стрелок промахнулся и второй промахнулся, ω_{01} – первый стрелок промахнулся, а второй попал, ω_{10} – первый стрелок попал, а второй промахнулся, ω_{11} – оба стрелка попали. Тогда событие $A = \{\omega_{10}, \omega_{11}\}$, а событие $B = \{\omega_{01}, \omega_{11}\}$.

а) Событие $A + B = \{\omega_{01}, \omega_{10}, \omega_{11}\}$ означает, что хотя бы один из стрелков попал в мишень.

б) Событие $A \cdot B = \{\omega_{11}\}$ $A \cdot B = \{\omega_{11}\}$ означает, что оба стрелка попали в мишень.

в) Событие $A \cdot \overline{B} = \{\omega_{10}\}$ означает, что первый стрелок попал в мишень, а второй промахнулся

Пример 13. Петя, Вася и Толя на спор решают сложную задачу по теории вероятностей. Пусть событие A_1 = {Петя решил задачу}, A_2 = {Вася решил задачу}, A_3 = {Толя решил задачу}. Выразить через события A_1, A_2 и A_3 следующие события:

а) B = {все они решат задачу};

б) C = {задачу решит только Петя};

в) D = {задачу решит ровно один из них};

г) E = {задачу решит хотя бы один из них};

д) F = {никто не решит задачу};

е) G = {задачу решит не более двух студентов}.

Решение.

а) $B = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$;

б) $C = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$;

в) $D = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$;

г) $E = A_1 + A_2 + A_3$;

д) $F = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$;

е) $G = \overline{A_1 \cdot A_2 \cdot A_3}$.

Отношения между событиями

Определение 9. *События A и B называются несовместными, если они не могут произойти одновременно:* $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \emptyset$.

Определение 10. *События A_1, A_2, ... A_n называются попарно несовместными, если несовместны любые два из них, то есть* $\forall\ \mathrm{i} \neq \mathrm{j}: \mathrm{A_i} \cdot \mathrm{A_j} = \emptyset$.

Определение 11. Событие *A влечет за собой* событие B ($A \subseteq B$), если всегда, как только происходит событие *A*, то происходит и событие *B*. Это означает, что любой элементарный исход, входящий в множество *A*, одновременно входит в множество *B*, то есть *A* содержится в *B*.

Пример 14. При бросании двух игральных костей события «сумма очков равна четырем» и «на первой кости выпало шесть очков» несовместны.

Событие «сумма очков равна двум» влечет за собой событие «на костях выпало одинаковое число очков».

Алгебра событий

Пусть Ω – пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента.

Определение 12. *Множество $\mathcal{A}$, элементами которого являются подмножества множества* **Ω** *(не обязательно все) называется алгеброй, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

(*A1*) $\Omega \in \mathcal{A}$;

(*A2*) если $A \in \mathcal{A}$, то $\overline{A} \in \mathcal{A}$;

(*A3*) если $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{A}$, то $A + B \in \mathcal{A}$.

Вместо замкнутости относительно объединения можно требовать замкнутость относительно пересечения.

Утверждение. В определении 12 можно заменить (*A3*) на (*A4*):

(*A4*) если $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{A}$, то $A \cdot B \in \mathcal{A}$.

Доказательство. (*A1*) + (*A2*) + (*A3*) => (*A4*)

Пусть $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{A}$, тогда по (*A2*) $\overline{A} \in \mathcal{A}$ и $\overline{B} \in \mathcal{A}$, а значит по (*A3*) $\overline{A} + \overline{B} \in \mathcal{A}$. Тогда $A \cdot B = \overline{\overline{A} + \overline{B}} \in \mathcal{A}$ по (*A2*).

Аналогично доказывается, что из (*A1*), (*A2*) и (*A4*) следует (*A3*).

Пример 15. Пусть Ω = *{1, 2, 3, 4} – пространство элементарных исходов некоторого опыта. Следующие наборы подмножеств* **Ω** *являются алгебрами:*

а) $\mathcal{A} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \varnothing\}$ – *тривиальная алгебра;*

б) $\mathcal{A} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \varnothing, \{2\}, \{1, 3, 4\}\}$;

в) $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$.

Определение 13. *Множество* $\mathcal{F}$, *элементами которого являются подмножества множества* Ω *(не обязательно все) называется σ-алгеброй, если выполнены следующие условия:*

($S1$) $\Omega \in \mathcal{F}$;

($S2$) если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$;

($S3$) если $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, то $A_1 + A_2 + \ldots \in \mathcal{F}$ (вместе с любым счётным набором событий σ-алгебра содержит их объединение).

Вместо замкнутости относительно объединения можно требовать замкнутость относительно пересечения.

Утверждение. В определении 13 можно заменить ($S3$) на ($S4$):

($S4$) если $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, то $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \in \mathcal{F}$.

Утверждение. Любая σ-*алгебра является алгеброй.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ – σ-*алгебра,* $A \in \mathcal{F}$ и $B \in \mathcal{F}$. Докажем, что $A + B \in \mathcal{F}$. Пусть $A_1 = A, A_2 = A_3 = \ldots = B$. Тогда по свойству ($S3$) $A + B + B + \ldots = A + B \in \mathcal{F}$. То есть множество $\mathcal{F}$ является алгеброй.

Пример 16. Пусть $\Omega = \boldsymbol{R}$, $\mathcal{A}$ – *множество, содержащее любые конечные подмножества* $\boldsymbol{R}$ *и их дополнения. Легко проверить, что множество* $\mathcal{A}$ *является алгеброй. Однако множество натуральных чисел* $\boldsymbol{N} = \{1\} \cup \{2\} \cup \ldots$ *не принадлежит* $\mathcal{A}$. *А это значит, что* $\mathcal{A}$ *не является* σ-*алгеброй.*

Событиями будем называть только множества $A \in \mathcal{F}$.

Аксиоматическое определение вероятности

Рассмотрим некоторое событие $A \in \mathcal{F}$. Проведем статистический эксперимент N раз. В этом эксперименте событие A произошло $N(A)$ раз. Тогда отношение $N(A) / N$ – *относительная частота* появления события A. При $N \to \infty$ относительная частота стабилизируется, но о сходимости говорить нельзя. Можно говорить о «*статистической устойчивости*» относительных частот. Вероятность появления события A, которую обозначим через p, приближенно равна $N(A) / N$.

Замечание. Теория вероятностей может применяться только к тем экспериментам, в которых наблюдается «статистическая устойчивость» относительных частот.

Определение вероятности события как предела частоты этого события неудобно прежде всего потому, что частота появления события в большой, но конечной, серии меняется от серии к серии испытаний. А бесконечную последовательность испытаний, в которой частота бы перешла в вероятность, реализовать невозможно.

Аксиоматика теории вероятностей была предложена А.Н. Колмогоровым в 1923 году.

Определение 14. Пусть Ω – *некоторое непустое множество, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра его подмножеств. Функция μ: $\mathcal{F} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ называется мерой на (Ω, $\mathcal{F}$), если она удовлетворяет условиям:*

($\mu 1$) для любого $A \in \mathcal{F}$: $\mu(A) \geq 0$;

($\mu 2$) для любого счётного набора попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ мера их объединения равна сумме мер: $\mu(A_1 + A_2 + \ldots) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots$ (счётная-аддитивность меры).

Пример 17. Пусть $\Omega = \mathbf{N}$, *$\mathcal{F} = 2^{\mathbf{N}}$ – множество всех подмножеств натурального ряда. Зададим меру μ на $\mathcal{F}$ так: $\mu(A) = |A|$ – число элементов в множестве A.*

Пример 18. Пусть $\Omega = \mathbf{R}$. *$\mathcal{F}$ – минимальная σ-алгебра, содержащая множество всех интервалов на вещественной прямой. Существует единственная мера λ на ($\mathbf{R}$, $\mathcal{F}$), значение которой на любом интервале равно его длине. Такая мера называется мерой Лебега.*

Определение 15. Пусть Ω – *непустое множество, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра его подмножеств. Мера μ: $\mathcal{F} \to \mathbf{R}$ называется нормированной, если $\mu(\Omega) = 1$.*

Определение 16. Пусть Ω – *пространство элементарных исходов некоторого опыта, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра его подмножеств (событий). Вероятностью или вероятностной мерой на (Ω, $\mathcal{F}$) называется функция $\mathbf{P}$: $\mathcal{F} \to \mathbf{R}$, обладающая свойствами: $\mu(\Omega) = 1$.*

($P1$) для любого $A \in \mathcal{F}$: $\mathbf{P}(A) \geq 0$;

($P2$) для любого счётного набора попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ имеет место равенство $\mathbf{P}(A_1 + A_2 + \ldots) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ldots$

($P3$) вероятность достоверного события равна единице: $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Свойства (P1) – (P3) называют аксиомами вероятности.

Определение 17. Тройка $<\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}>$ *называется вероятностным пространством.*

Дискретное вероятностное пространство

Если пространство элементарных исходов дискретное, то можно каждому элементарному исходу ω_i сопоставить действительное число p_i из промежутка [0; 1] так, чтобы $\sum p_i = 1$.

Определение 18. *Вероятностью* события A называется число, равное сумме вероятностей элементарных исходов, входящих в множество A

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i.$$

Пример 19. *Пусть монета подбрасывается до первого выпадения герба.* В качестве элементарного исхода рассматриваем номер броска, на котором выпал орел. $\omega_i = i$, $i \in \mathbf{N}$. *Присвоим элементарным исходам следующие вероятности $\mathbf{P}(\omega_i) = \frac{1}{2^i}$. Тогда вероятность события A = {потребовалось не более трех бросков} равна* $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0{,}875.$

Пример 20. *На множестве элементарных исходов* $\Omega = \{i, i \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}\}$ зададим вероятности $\mathbf{P}(\omega_i) = \frac{7^i}{i!}e^{-7}$. *Проверим, равна ли единице сумма вероятностей всех элементарных исходов*

$$\sum_{\omega_i \in \Omega} p_i = e^{-7} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{7^i}{i!} = e^{-7} \cdot e^{7} = 1.$$

Классическая вероятность

Если множество всех элементарных исходов конечно, то можно всем исходам присвоить равные вероятности. Тогда вероятность события A, состоящего из элементарных исходов $\{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots \omega_{ik}\}$, равна

$$\mathbf{P}(A) = p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{ik} = k \cdot \frac{1}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Вероятность события A равна отношению числа исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу равновозможных исходов.

В реальной жизни проблемой использования классической вероятности является необходимость доказать, что все элементарные исходы равновозможны. Чаще всего это вытекает из соображений симметрии.

Пример 21. *Одновременно бросают две неразличимые игральные кости. Найти вероятность того, что на обеих костях выпадут одинаковые числа.*

Решение. В данном случае элементарные исходы (неупорядоченные пары) не будут равновозможными. Из-за этого нельзя использовать классическую вероятность. Пометим одну из костей. Тогда получим множество из 36 равновозможных элементарных исходов (упорядоченных пар). Исходы (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) будут благоприятными событию A = {выпали одинаковые значения на костях}. Тогда $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Пример 22. *Из урны, содержащей 5 белых и 20 черных шаров, наудачу и без возвращения вынимают три шара. Найти вероятность того, что будет выбран один белый и два черных шара.*

Решение. Результатом опыта будет набор из трех шаров. Можно не учитывать порядок следования шаров в наборе. Нельзя рассмотреть множество элементарных исходов ω_i = {в наборе i белых шаров}, i = 0, 1, 2, 3, поэтому пронумеруем шары (будем считать их различимыми). Тогда множеством элементарных исходов будет множество неупорядоченных наборов из трех элементов. Всего таких исходов $n = \binom{25}{3}$. Введем событие A = {в выбранном наборе один белый и два черных шара}. Элементарных исходов, благоприятных событию A, $m = \binom{5}{1} \cdot \binom{20}{2}$, тогда

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{20}{2}}{\binom{25}{3}} = \frac{5\cdot\frac{20\cdot 19}{1\cdot 2}}{\frac{20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3}} = \frac{5\cdot 3}{18} = \frac{5}{6} \approx 0{,}83.$$

Свойства вероятности

Рассмотрим вероятностное пространство <Ω, $\mathcal{F}$, $\boldsymbol{P}$>.

<u>Свойство 1</u>. $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

Доказательство.

Воспользуемся тем, что $A + \overline{A} = \Omega$, причём $A \cdot \overline{A} = \varnothing$ (событие и его отрицание несовместны), тогда $1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(A + \overline{A}) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A})$, отсюда и следует требуемое.

<u>Свойство 2</u>. $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.

Доказательство.

$\mathbf{P}(\varnothing) = \mathbf{P}(\overline{\Omega}) = 1 - \mathbf{P}(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

<u>Свойство 3</u>. Для любого конечного набора попарно несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ имеет место равенство:

$$\mathbf{P}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \cdots + \mathbf{P}(A_n).$$

Доказательство.

Рассмотрим последовательность попарно несовместных событий $A_1, A_2, \dots A_n, \emptyset, \emptyset, \dots$, тогда вероятность их суммы будет равна сумме их вероятностей ($P2$), то есть

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) &= \mathbf{P}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \emptyset + \emptyset + \cdots) = \\ &= \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \cdots + \mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(\emptyset) + \mathbf{P}(\emptyset) + \cdots = \\ &= \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \cdots + \mathbf{P}(A_n).\end{aligned}$$

<u>Свойство 4</u>. Если $A \subseteq B$, то $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$.

Доказательство.

Представим событие B как сумму двух несовместных $B = A + B\backslash A$, тогда $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A + B\backslash A) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B\backslash A) \geq \mathbf{P}(A)$.

<u>Свойство 5</u>. $\mathbf{P}(B\backslash A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$.

Доказательство.

Представим событие B как сумму двух несовместных $B = AB + B\backslash A$, тогда $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB + B\backslash A) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(B\backslash A)$. Отсюда получим требуемое.

Заметим, что если $A \subseteq B$, то $AB = A$ и $\mathbf{P}(B\backslash A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$.

<u>Свойство 6</u>. $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$.

Доказательство.

Представим событие $A + B$ как сумму двух несовместных $A + B = A + B\backslash A$, тогда

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A + B\backslash A) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B\backslash A) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB).$$

<u>Свойство 7</u>. $\mathbf{P}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$.

Доказательство.

Докажем по индукции.

<u>*База*</u>. $n = 2$. $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

Индукционное предположение. Пусть для $n = k$ верно утверждение

$$\mathbf{P}(A_1 + A_2 + \dots + A_k) \le \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(A_i)$$

Индукционный переход. Докажем для $n = k + 1$.

$$\mathbf{P}\big((A_1 + A_2 + \dots + A_k) + A_{k+1}\big) \le \mathbf{P}(A_1 + A_2 + \dots + A_k) + \mathbf{P}(A_{k+1}) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(A_i) + \mathbf{P}(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \mathbf{P}(A_i).$$

Свойство 8. *Формула включения-исключения*

$$\mathbf{P}(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbf{P}\big(A_i A_j\big) + \dots + (-1)^n \mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_n).$$

Доказательство.

Докажите самостоятельно по индукции.

Литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2000.
2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1999.
3. Мхитарян, В. С. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / В. С. Мхитарян, В. Ф. Шишов, А. Ю. Козлов. – М.: Академия, 2012.
4. Тарасов, Л. В. Мир, построенный на вероятности / Л. В. Тарасов. – М.: Просвещение, 1984.
5. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и её приложения / В. Феллер. – М.: Мир, 1984.