Алгебра событий. Свойства вероятностей

1. Вероятность того, что тракторы A, B, C пройдут посевную без ремонта, равны 0,7, 0,9, 0,8 соответственно. Найти вероятность того, что ремонта потребует

а) ровно один трактор;

б) хотя бы один трактор;

в) только третий трактор.

Решение.

Пусть событие A = {ремонта потребует трактор A}, $\mathbf{P}(A) = 0{,}3$;

событие B = {ремонта потребует трактор B}, $\mathbf{P}(B) = 0{,}1$;

событие C = {ремонта потребует трактор C}, $\mathbf{P}(C) = 0{,}2$.

а) Введем событие D = {ремонта потребует ровно один трактор}. Если событие D произошло, то один из трех тракторов потребовал ремонта, а остальные прошли посевную без ремонта, тогда

$$D = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C.$$

$$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}\left(A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C\right)$$

Так как события $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$, $\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$ и $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$ попарно несовместны, то

$$\mathbf{P}\left(A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C\right) = \mathbf{P}\left(A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}\right) + \mathbf{P}\left(\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}\right) + \mathbf{P}\left(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C\right)$$

События A, B и C независимы в совокупности, при этом если заменить любое событие на его отрицание, то независимость в совокупности сохранится. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей, поэтому

$$\mathbf{P}\left(A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}\right) + \mathbf{P}\left(\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}\right) + \mathbf{P}\left(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C\right) =$$

$$= \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathbf{P}\left(\overline{C}\right) + \mathbf{P}\left(\overline{A}\right) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}\left(\overline{C}\right) + \mathbf{P}\left(\overline{A}\right) \cdot \mathbf{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathbf{P}(C).$$

Подставим известные вероятности и получим ответ

$$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathbf{P}\left(\overline{C}\right) + \mathbf{P}\left(\overline{A}\right) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}\left(\overline{C}\right) + \mathbf{P}\left(\overline{A}\right) \cdot \mathbf{P}\left(\overline{B}\right) \cdot \mathbf{P}(C) =$$

$$= 0{,}3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 =$$

$$= 0{,}216 + 0{,}056 + 0{,}126 = 0{,}398.$$

б) Введем событие E = {ремонта потребует хотя бы один трактор}. Если событие E произошло, то либо ровно один трактор потребовал ремонта, либо ровно два, либо ремонта потребовали все три трактора.

Пусть E_2 = {ремонта потребовали два трактора}, выразим событие E_2 через события A, B, C и их отрицания, проведем аналогичные преобразования и вычислим его вероятность

$$E_2 = A \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C,$$

$$\mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(\overline{C}) + \mathbf{P}(\overline{A}) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(\overline{B}) \cdot \mathbf{P}(C) =$$

$$= 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 =$$

$$= 0{,}024 + 0{,}014 + 0{,}054 = 0{,}092.$$

Аналогично найдем вероятность события E_3 = {ремонта потребовали три трактора},

$$\mathbf{P}(E_3) = \mathbf{P}(A \cdot B \cdot C) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C) = 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}006.$$

Таким образом, так как события D, E_2 и E_3 попарно несовместны, то

$$\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}(D + E_2 + E_3) = \mathbf{P}(D) + \mathbf{P}(E_2) + \mathbf{P}(E_3) = 0{,}398 + 0{,}092 + 0{,}006 =$$

$$= 0{,}496.$$

Заметим, что в данной задаче можно было избежать большого количества вычислений, если искать вероятность не события E, а его отрицания.

$\overline{E}$ = {ремонта не потребует ни один трактор} означает, что первый трактор не потребует ремонта и второй трактор не потребует ремонта, и третий трактор не потребует ремонта, то есть

$$\mathbf{P}(\overline{E}) = \mathbf{P}(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}) = \mathbf{P}(\overline{A}) \cdot \mathbf{P}(\overline{B}) \cdot \mathbf{P}(\overline{C}) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}504.$$

По свойству вероятностей получим

$$\mathbf{P}(E) = 1 - \mathbf{P}(\overline{E}) = 1 - 0{,}504 = 0{,}496.$$

В обоих случаях были получены одинаковые результаты.

в) Событие F = {ремонта потребует только третий трактор} можно представить как $F = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$, Тогда

$$\mathbf{P}(F) = \mathbf{P}(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C) = \mathbf{P}(\overline{A}) \cdot \mathbf{P}(\overline{B}) \cdot \mathbf{P}(C) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 = 0{,}126.$$

Ответ: а) 0,398, б) 0,496, в) 0,126.

2. Контрольная работа состоит из двух задач по алгебре и одной задачи по геометрии. Семён может правильно решить задачу по алгебре с вероятностью 0,8, а задачу по геометрии с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что Семён решит все задачи хотя бы по одному из предметов.

Решение.

Пусть событие A_i = {Семён решил i-ую задачу по алгебре}, $\mathbf{P}(A_i) = 0{,}8$, B_i = {Семён решил i-ую задачу по геометрии}, $\mathbf{P}(B_i) = 0{,}6$.

Дополнительно введем события A = {Семён решил все задачи по алгебре}, B = {Семён решил все задачи по геометрии}.

Вероятность того, что он решит все задачи по алгебре, равна $\mathbf{P}(A) = 0{,}8^2 = 0{,}64$, а по геометрии – $\mathbf{P}(B) = 0{,}6^3 = 0{,}216$.

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cdot B) = 0{,}64 + 0{,}216 - 0{,}64 \cdot 0{,}216 \approx 0{,}718.$$

Ответ: вероятность того, что Семен решит задачи хотя бы по одному из предметов, равна $0{,}718$.

3. Победитель в некоторой игре определяется большинством голосов 3 судей. Два судьи независимо друг от друга выносят верное решение с вероятностью p, а третий голосует, бросая монету. Найти вероятность принятия судьями верного решения.

Решение.

Пусть A_i = {i-ый судья вынес верное решение},

$$\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = p,\ \mathbf{P}(A_3) = \frac{1}{2}.$$

Событие B = {было принято верное решение}. Событие B произойдет, если два или три судьи примут верное решение

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\big(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3\big) =$$

$$= p \cdot p \cdot 0{,}5 + p \cdot (1 - p) \cdot 0{,}5 + (1 - p) \cdot p \cdot 0{,}5 + p \cdot p \cdot 0{,}5 = p.$$

Ответ: вероятность того, что судьи примут верное решение, равна p.