События. Классическая вероятность

1. В коробке 5 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Наудачу вынимают 3 карандаша. Найти вероятности следующих событий

а) A = {все вынутые карандаши разных цветов};

б) B = {среди вынутых карандашей 2 синих и 1 зеленый};

в) C = {все вынутые карандаши одного цвета}.

Решение.

Элементарный исход данного опыта – это неупорядоченный набор из 3 карандашей.

Всего элементарных исходов в данном опыте $|\Omega| = \binom{12}{3} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1} =$ $= 220$.

а) Событию A благоприятны тройки из синего, красного и зеленого карандашей, таких троек $|A| = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$, то есть

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11} \approx 0{,}273.$$

б) Событию B благоприятны тройки из двух синих и одного зеленого карандашей, таких троек $|B| = \binom{5}{2}\cdot 3 = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot 3 = 30$, то есть

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{30}{220} = \frac{3}{22} \approx 0{,}136.$$

в) Событию C благоприятны тройки из трех синих, из трех красных или из трех зеленых карандашей, таких троек $|C| = \binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} +$ $+ \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1} = 10 + 4 + 1 = 15$, то есть

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44} \approx 0{,}068.$$

Ответ: $P(A) \approx 0{,}273$, $P(B) \approx 0{,}136$, $P(C) \approx 0{,}068$.

2. На пяти карточках написали цифры от 1 до 5, после чего карточки перевернули и перемешали. Затем последовательно открыли карточки и положили в ряд. Найти вероятность того, что а) получится пятизначное число, большее 30000;

б) полученное число будет кратно 5.

Решение.

Элементарный исход данного опыта – это пятизначное число, состоящее из цифр 1, 2, 3, 4 и 5, цифры в числе не повторяются.

Всего элементарных исходов в данном опыте $|\Omega| = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

а) Пусть событие A = {число больше 30000}, нам подходят числа, начинающиеся на 3, 4 или 5, таких чисел $|A| = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72$, то есть

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{72}{120} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

б) Пусть событие B = {число кратно 5}. В этом случае подойдут все числа, оканчивающиеся на 5. Первые четыре цифры могут идти в произвольном порядке. Таких чисел $|B| = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, то есть

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Ответ: а) 0,6, б) 0,2.

3. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Известно, что каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что

а) все пятеро выйдут на пятом этаже;

б) все пятеро выйдут одновременно (на одном и том же этаже);

в) все пятеро выйдут на разных этажах.

Решение.

Пусть (a, b, c, d, e) – номера этажей, на которых вышли эти 5 человек, числа a, b, c, d и e могут принимать любые значения от 2 до 9.

Элементарный исход данного опыта – это упорядоченная пятерка (a, b, c, d, e), числа в которой могут повторяться.

Всего элементарных исходов в данном опыте $|\Omega| = 8^5 = 32768$.

а) Пусть событие A = {все вышли на пятом этаже}, тогда ему благоприятна только одна пятерка $(5,5,5,5,5)$, то есть

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{8^5} \approx 0{,}00003.$$

б) Событию B = {все вышли на одном этаже} благоприятны все пятерки вида (x, x, x, x, x), таких пятерок $|B| = 8$, то есть

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{8}{8^5} \approx 0{,}00024.$$

в) Событию C = {все вышли на разных этажах} благоприятны упорядоченные наборы из пяти неповторяющихся чисел, таких наборов $|C| = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$, то есть

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{6720}{32768} = \frac{105}{512} \approx 0{,}20507.$$

Ответ: а) $0{,}00003$, б) $0{,}00024$, в) $0{,}20507$.

4. Колоду из 36 карт наудачу разделяют на две равные пачки. Найти вероятность того, что

а) все четыре туза окажутся в одной пачке;

б) в каждой пачке окажется по два туза;

в) в первой пачке черных и красных карт окажется поровну.

Решение.

Пусть колоду разделили на пачки A и B. Тогда элементарным исходом данного опыта будем считать набор карт, попавших в пачку A.

Всего элементарных исходов в данном опыте $|\Omega| = \binom{36}{18} = \frac{36!}{18! \cdot 18!}$.

а) Пусть событие A = {все четыре туза окажутся в одной пачке}. Этому событию благоприятны все исходы, в которых в пачке A оказалось четыре туза, и исходы, в которых в пачке A тузов нет (все четыре в пачке B). В первом случае отберем все тузы в первую пачку и добавим туда 14 случайных карт $\binom{32}{14}$ способами, а во втором случае отберем любые 18 карт из 32 (без тузов), это можно сделать $\binom{32}{18}$ способами.

Замечание. $\binom{32}{14} = \binom{32}{18}$ по свойству сочетаний.

Всего исходов, благоприятных событию A, $|A| = 2 \cdot \binom{32}{14} = \frac{2 \cdot 32!}{14! \cdot 18!}$, тогда

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{2\cdot\binom{32}{14}}{\binom{36}{18}}=\frac{2\cdot 32!\cdot 18!\cdot 18!}{14!\cdot 18!\cdot 36!}=\frac{2\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15}{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33}=\frac{8}{77}\approx 0{,}104.$$

б) Событию B = {в каждой пачке окажется по два туза} благоприятны все наборы, состоящие из двух любых тузов и 16 любых других карт, таких наборов $|B|=\binom{4}{2}\cdot\binom{32}{16}=\frac{6\cdot 32!}{16!\cdot 16!}$, то есть

$$P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{32}{16}}{\binom{36}{18}}=\frac{6\cdot 32!\cdot 18!\cdot 18!}{16!\cdot 16!\cdot 36!}=\frac{6\cdot 18\cdot 17\cdot 18\cdot 17}{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33}=\frac{153}{365}\approx 0{,}397.$$

в) Событию C = {в первой пачке черных и красных карт окажется поровну} благоприятно $|C|=\binom{18}{9}\cdot\binom{18}{9}$ наборов, так как в первую пачку мы отбираем любые 9 черных карт и любые 9 красных. Таким образом, получим

$$P(C)=\frac{|C|}{|\Omega|}=\frac{\binom{18}{9}\cdot\binom{18}{9}}{\binom{36}{18}}=\frac{18!\cdot 18!\cdot 18!\cdot 18!}{9!\cdot 9!\cdot 9!\cdot 9!\cdot 36!}\approx 0{,}260.$$

Ответ: а) 0,104, б) 0,397, в) 0,260.