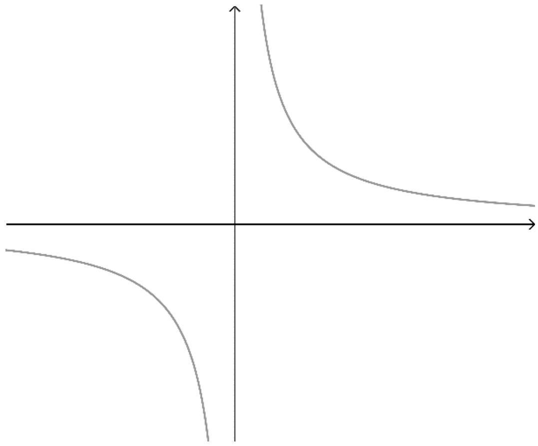
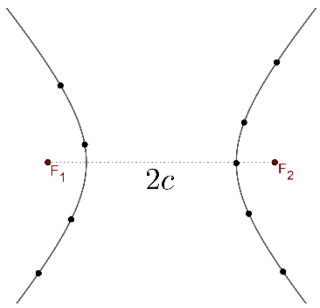
## Словарь 16.

## Кривые второго порядка. Часть 2

Обратная пропорциональность – функция, заданная уравнением $y = \frac{k}{x}$

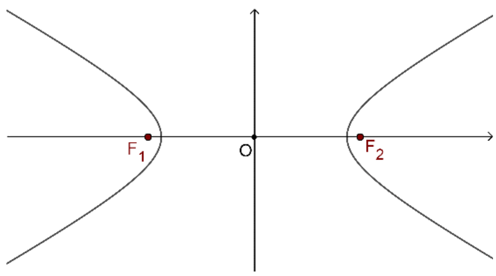


Гипербола – фигура, состоящая из множества точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек $F_1$ и $F_2$ есть постоянная величина. Точки $F_1$ и $F_2$ называются фокусами гиперболы. Расстояние между фокусами называют межфокусным расстоянием:




Фокальные радиусы гиперболы – расстояния $MF_1$ и $MF_2$ от точки на гиперболе $M$ до фокусов.

Каноническая система координат гиперболы – прямоугольная система координат, у которой в качестве начала координат будет выступать середина $O$ отрезка $F_1F_2$ (гипербола симметрична относительно точки $O$, эта точка называется центром гиперболы), ось абсцисс направлена вдоль отрезка $F_1F_2$, ось ординат перпендикулярна оси абсцисс:




Каноническое уравнение гиперболы – уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболы в ее канонической системе координат.

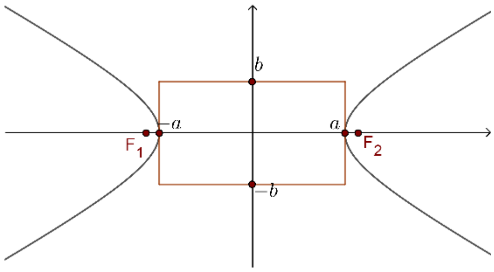
Действительные вершины гиперболы – точки пересечения гиперболы с осью абсцисс канонической системы координат.

Мнимые вершины гиперболы – точки на оси ординат с ординатами $b$ и $(–b)$ (они не принадлежат гиперболе).

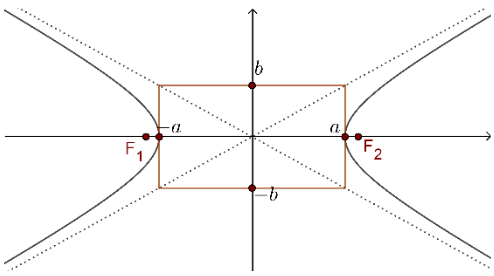
Действительная полуось гиперболы – параметр $a$ гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Мнимая полуось гиперболы – параметр $b\sqrt{c^2-a^2}$ гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Опорный прямоугольник гиперболы – прямоугольник, который получится если через вершины гиперболы провести прямые параллельные осям координат:



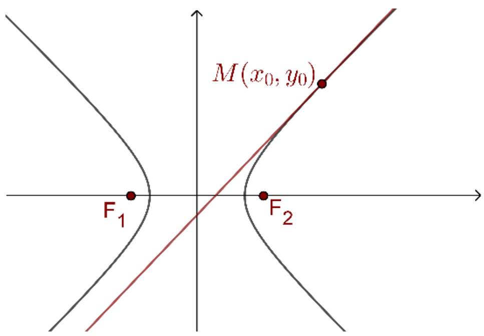

Асимптоты гиперболы – прямые, содержащие диагонали опорного прямоугольника. Гипербола неограниченно приближается к своим асимптотам, но не пересекает их:




Асимптоты могут быть заданы уравнениями с угловыми коэффициентами:

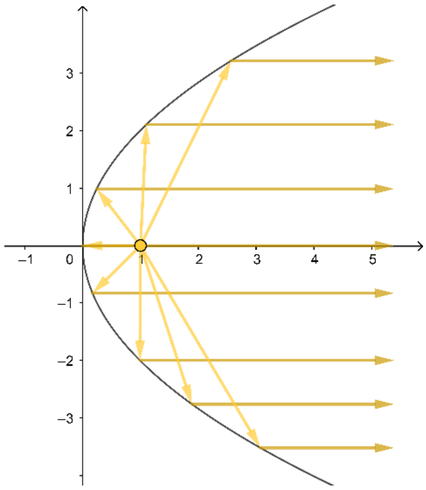
$$l_1: y=\frac{b}{a}x, \quad l_2: y=-\frac{b}{a}x.$$

Касательная к гиперболе в точке $M_0$ – предельное положение секущей, при котором точка $M_0$ совпадет с второй точкой сечения:

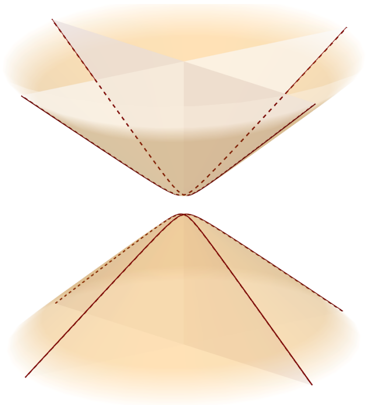



Касательная к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке с координатами $(x_0,\ y_0)$ задается в канонической системе координат уравнением $\frac{x_0}{a^2}x-\frac{y_0}{b^2}y=1$.

Оптическое свойство гиперболы – лучи света, вышедшие из одного фокуса гиперболы, после отражения от ближайшей ветви гиперболы, имеют направление вектора, идущего от второго фокуса к точке отражения.



Двуполостный гиперболоид вращения – пространственная фигура, которая получается при вращении гиперболы вокруг ее действительной оси.



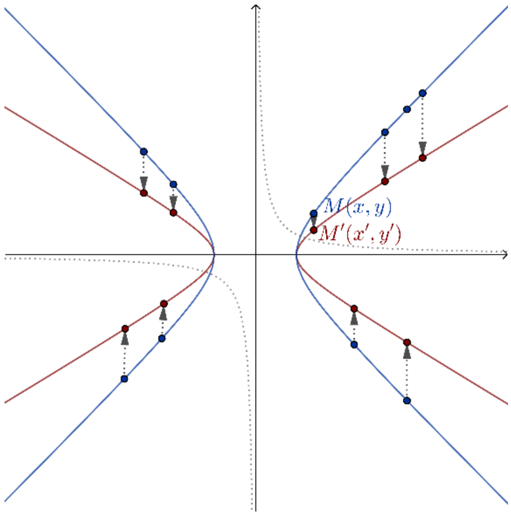
Эксцентриситет гиперболы – число, равное отношению параметров $c$ и $a$: $\varepsilon = \frac{c}{a}\,(\varepsilon > 1)$.

С увеличением $\varepsilon = \frac{c}{a}$ отношение $\frac{b}{a}$ также увеличивается, то есть растет величина угла между асимптотами в правой полуплоскости от оси ординат, поэтому ветви гиперболы «вытягиваются» вдоль оси ординат.

Равнобочная гипербола – гипербола с равными полуосями.

График функции $y = \frac{k}{x}$ является равнобочной гиперболой.

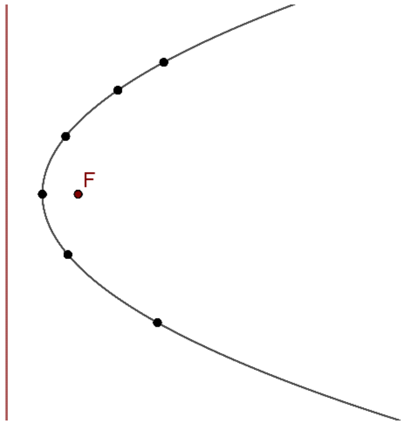
Произвольная гипербола получается из равнобочной гиперболы с помощью операции сжатия.




Квадратичная зависимость – функция, заданная уравнением

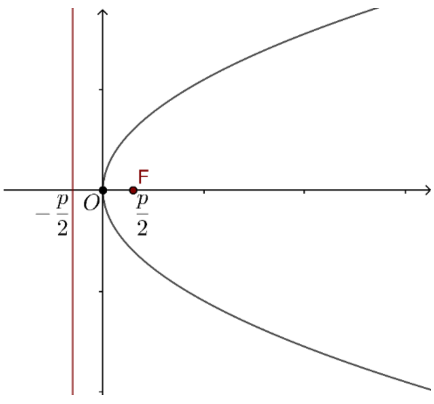
$$y = ax^2 + bx + c.$$

Парабола – фигура, состоящая из множества точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки $F$ и данной прямой $l$. Точку $F$ называют фокусом, а прямую $l$ – директрисой.




Фокальный параметр – расстояние $p$ от фокуса до директрисы.

Каноническая система координат параболы – прямоугольная система координат, у которой в качестве начала координат выступает середина $O$ перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису, ось абсцисс – это прямая $OF$, направленная от $O$ к $F$:



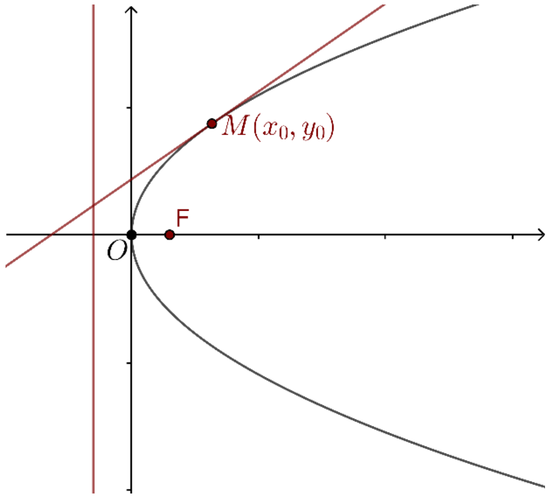

Вершина параболы – центр ее канонической системы координат.

Ось симметрии параболы – оси абсцисс ее канонической системы координат.

Каноническое уравнение параболы – уравнение $y^2 = 2px$ параболы в ее канонической системе координат.

Графиком квадратичной функции является парабола.

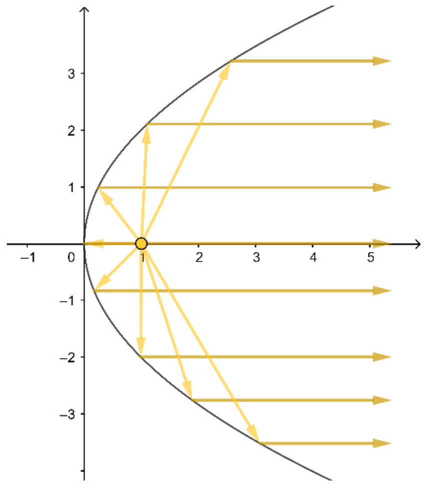
Касательная к параболе в точке $M_0$ – предельное положение секущей, при котором точка $M_0$ совпадет со второй точкой сечения:




Касательная к параболе $y^2 = 2px$ в $(x_0, y_0)$ в канонической системе координат задается уравнением:

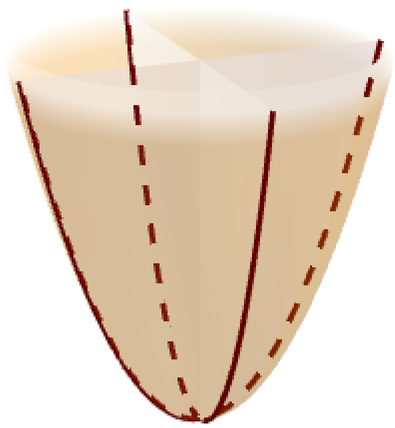
$$p(x + x_0) = yy_0.$$

Оптическое свойство параболы: если в фокусе параболы поместить точечный источник света (лампочку), то лучи, отразившись от параболы, пойдут параллельно оси симметрии параболы.

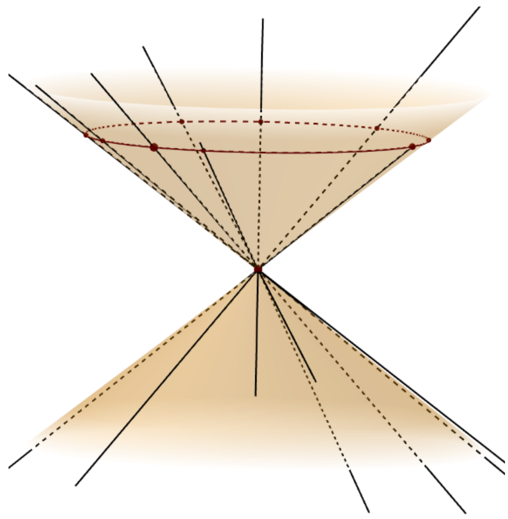



Верно и обратное утверждение: если на параболу падает поток лучей, параллельных оси симметрии, то, отразившись от параболы, лучи попадут в фокус.

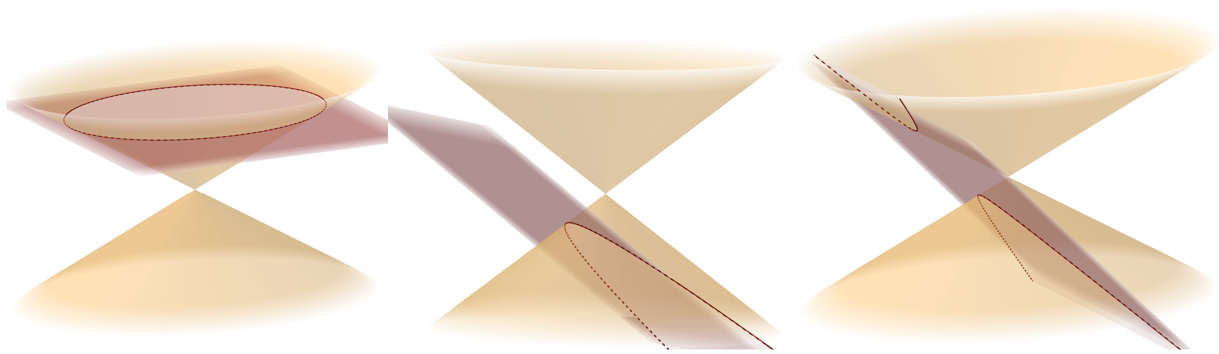
Параболоид вращения – пространственная фигура, которая получается при вращении параболы вокруг ее оси симметрии – поверхность второго порядка.



Конус – множество всех прямых, соединяющих всевозможные точки окружности и фиксированную, не лежащую в плоскости этой окружности, точку (вершину конуса).

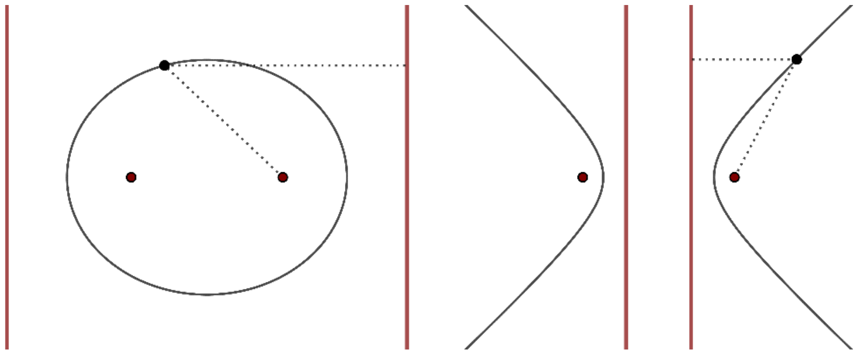


Если конус пересекать различными плоскостями, то в сечении может получиться эллипс (в частности, окружность), гипербола, парабола, точка, прямая или пара прямых.



Директрисы эллипса и гиперболы – прямые, которые задаются в канонической системе координат уравнениями $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Каждая директриса обладает свойством: отношение расстояния от произвольной точки кривой до фокуса к расстоянию от той же точки до соответствующей директрисы есть величина постоянная.



**Теорема**. *Для прямой* $l$, *точки* $F \notin l$, *числа* $\varepsilon > 0$, *множество точек M, удовлетворяющих равенству*

$$|MF| = \varepsilon \cdot d(M,\ l),$$

*определяет кривую второго порядка, которая:*

- *при* ε < 1 *является эллипсом* (*отличным от окружности*),
- *при* ε = 1 – *параболой*,
- *при* ε > 1 – *гиперболой*.

Эксцентриситет параболы равен 1.

Фокальный параметр *p* для эллипса и гиперболы: $p = \frac{b^2}{2}$.

Все три кривые второго порядка – эллипс, параболу, гиперболу, можно задать единым уравнением (при соответствующем значении параметра ε):

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 - 2px + y^2 = 0.$$