Словарь 15.

Кривые второго порядка. Часть 1

Линия (или кривая) второго порядка – фигура, задаваемая в некоторой декартовой системе координат на плоскости алгебраическим уравнением второй степени, которое в общем виде принято записывать так:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Здесь x, y – переменные, а коэффициенты при переменных – параметры, при фиксировании которых получается конкретное уравнение линии. В этом уравнении требуется, чтобы среди параметров a, b, c хотя бы один был не равен 0, иначе (если допустить, что все три первых параметра равны 0) это уравнение превратится в линейное. Коэффициент 2 в записи общего уравнения используют для того, чтобы упростить вид некоторых формул.

Мнимая кривая второго порядка – несуществующая линия (пустое множество точек), задаваемая уравнением второй степени

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

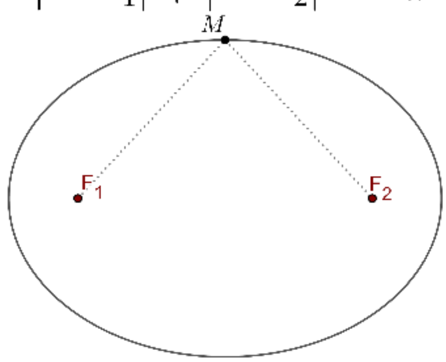
Например, если $a = 1$ и $f = 1$, а все остальные параметры равны 0, то полученное уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решений.

Невырожденная кривая второго порядка – кривая второго порядка, для которой $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \neq 0$. Среди реально существующих линий могут получиться только 3 вида: эллипс ($\delta > 0$), гипербола ($\delta < 0$) и парабола ($\delta = 0$).

Вырожденная кривая второго порядка – кривая второго порядка, для которой $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$. Линия может выродиться в точку ($\delta > 0$), либо в две пересекающиеся прямые ($\delta < 0$), либо в две параллельные прямые или совпадающие прямые ($\delta = 0$).

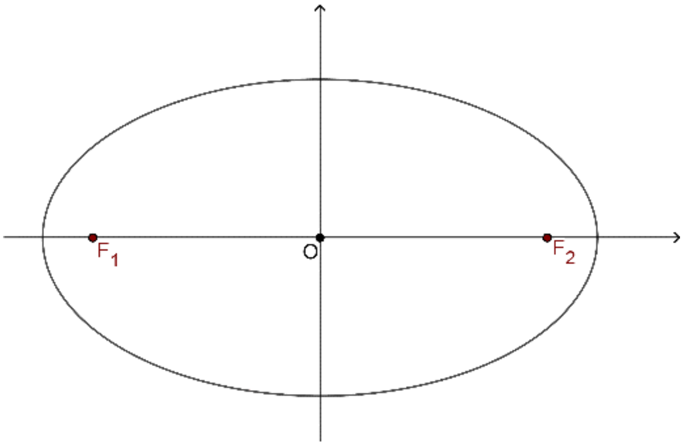
Эллипс – множество точек плоскости, таких, что сумма расстояний от каждой из них до точек F_1 и F_2 есть величина постоянная. Фиксированные точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса, расстояние между ними – межфокусным расстоянием.

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a$$



Фокальные радиусы эллипса – расстояния MF_1 и MF_2 от точки на эллипсе M до фокусов.

Каноническая система координат эллипса – прямоугольная система координат, у которой в качестве начала координат выступает точка O – середина отрезка F_1F_2. Ось абсцисс направлена вдоль прямой F_1F_2, ось ординат – перпендикулярно первой оси в любом направлении:



Для окружности канонической системой координат является система, в которой центр окружности совпадает с ее началом.

Оси симметрии эллипса – оси его канонической системы координат.

Центр эллипса – центр его канонической системы координат.

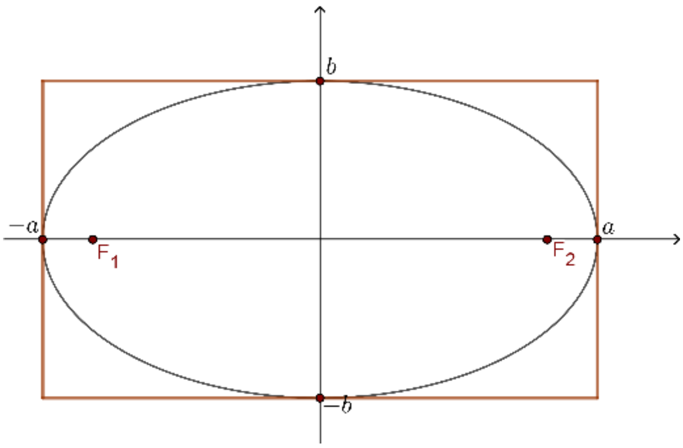
Каноническое уравнение эллипса – уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипса в его канонической системе координат.

Большая полуось эллипса – параметр a эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

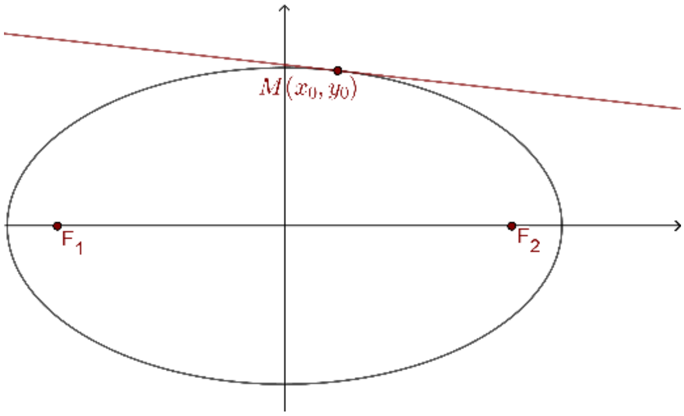
Малая полуось эллипса – параметр $b=\sqrt{a^2-c^2}$ эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Вершины эллипса – точки пересечения эллипса с осями канонической системы координат.

Опорный прямоугольник эллипса – прямоугольник, который получится если через вершины эллипса провести прямые параллельные осям координат:

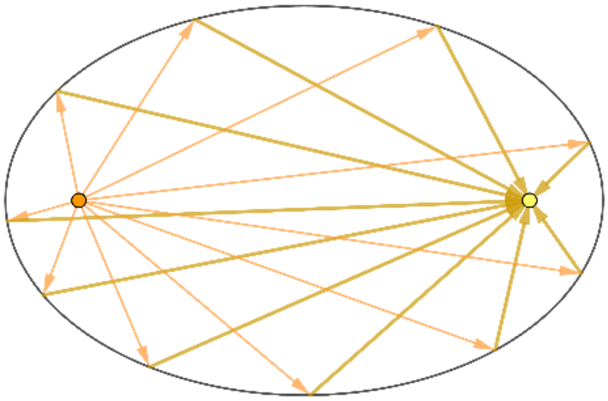


Касательная к эллипсу в точке M_0 – предельное положение секущей, при котором точка M_0 совпадет с второй точкой сечения:

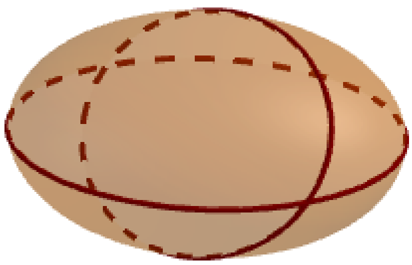


Касательная к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ задается уравнением $\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1$.

Оптическое свойство эллипса: если в один из фокусов поместить источник излучения, то все лучи, отразившись от эллипса, соберутся во втором фокусе:



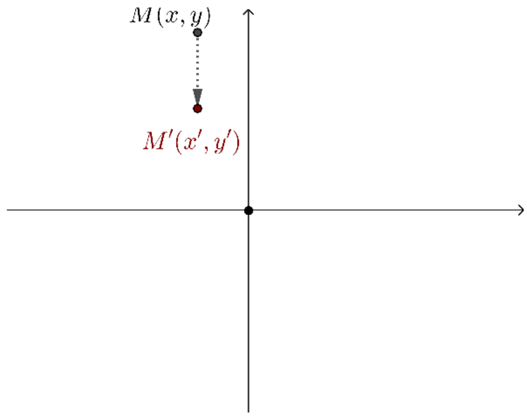
Эллипсоид вращения – пространственная фигура, которая получается при вращении эллипса вокруг прямой, проходящей через фокусы:



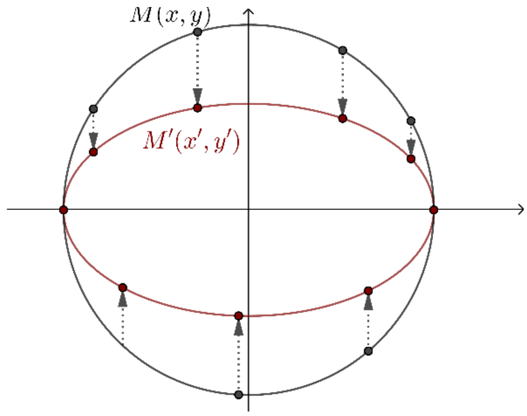
Эксцентриситет эллипса – число, равное отношению параметров c и a: $\varepsilon = \frac{c}{a}$ $(0 \leq \varepsilon < 1)$.

Чем эксцентриситет больше, тем сильнее эллипс «вытягивается» вдоль оси абсцисс. В крайнем случае, когда $\varepsilon = 0$, параметры a и b равны, и эллипс становится окружностью.

Сжатием к оси с коэффициентом k – преобразование точек плоскости, которое каждой точке M с координатами (x, y) сопоставляет точку с координатами (x', y'), такими, что $x = x'$, $y = ky'$ (то есть первая координата не изменяется, а вторая координата умножается на постоянный коэффициент)



Любой эллипс можно получить из окружности с помощью преобразования сжатия с коэффициентом $\frac{b}{a}$



Любой эллипс может быть задан параметрически:

$$\begin{cases} x' &= a\cos t \\ y' &= b\sin t \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}.$$