Кривые второго порядка. Гипербола и парабола

Задача 1. В канонической системе координат гипербола имеет асимптоты $3x + 4y = 0$, $3x - 4y = 0$, и межфокусное расстояние, равное 20. Постройте гиперболу.

Решение. Асимптоты гиперболы в канонической системе координат определяются уравнениями $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$.

Угловые коэффициенты прямых $3x + 4y = 0$, $3x - 4y = 0$ равны $\pm\frac{3}{4}$, значит, $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$, то есть $\begin{cases} a = 4t \\ b = 3t \end{cases}$, где t – некоторое положительное число.

Межфокусное расстояние $2c = 20$, отсюда $c = 10$.

Учитывая взаимосвязь между параметрами $b^2 = c^2 - a^2$, получаем:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 16t^2 + 9t^2 = 100 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = 2.$$

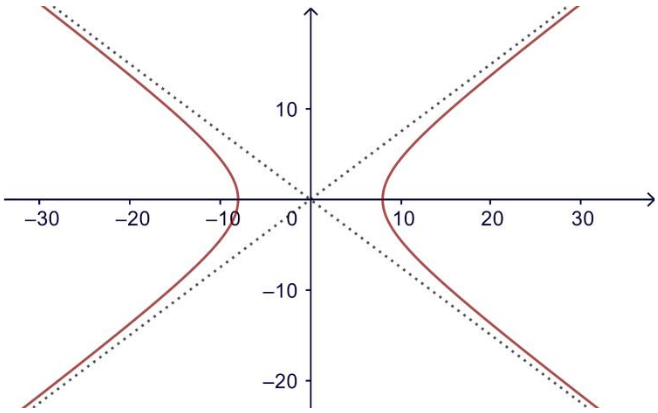
Значит, $a = 4t = 8$, $b = 3t = 6$.

Имеем каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Фокусы находятся в точках $F_1(-10; 0)$, $F_2(10; 0)$.

Построим гиперболу



Ответ: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

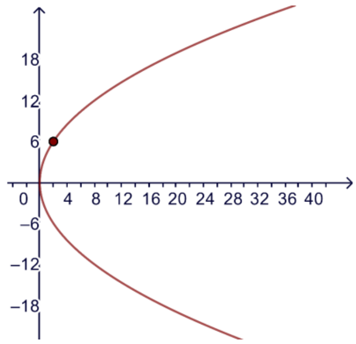
Задача 2. В канонической системе координат парабола проходит через точку с координатами (2; 6). Составьте уравнение параболы и постройте ее.

Решение. Каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$. Так как точка $M(2; 6)$ принадлежит параболе, то ее координаты удовлетворяют уравнению, значит, $6^2 = 2p \cdot 2$, откуда $p = \frac{36}{4} = 9$.

Итак, парабола задается уравнением

$$y^2 = 18x.$$

Построим параболу



Ответ: $y^2 = 18x$.

Задача 3. В канонической системе координат $Qx'y'$ парабола имеет уравнение $y'^2 = 2x'$. Пусть $O(-2;3)$. Какое уравнение будет иметь парабола в системе координат Oxy с теми же направлениями осей координат?

Решение. Назовем систему координат $Qx'y'$ старой, а систему с началом O, оси которой имеют такое же направление, – новой.

Возьмем точку M на данной параболе. Пусть в старой системе координат она имеет координаты (x', y'), в новой системе – координаты (x, y). Задача состоит в том, чтобы найти уравнение, которому удовлетворяют x и y.

Так как соответствующие оси обеих систем координат имеют одно направление, базисные векторы одинаковы.

$\overrightarrow{OM}$ – это радиус-вектор точки $M(x, y)$ в новой системе, поэтому этот вектор можно представить в виде $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

$\overrightarrow{QM}$ – радиус-вектор точки $M(x', y')$ в старой системе, поэтому $\overrightarrow{QM} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$.

Также $\overrightarrow{QO} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$.

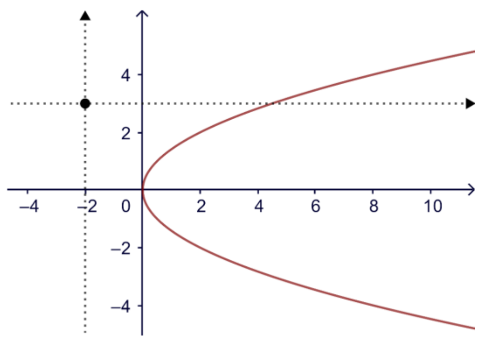
Представим $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OM} = (-2 + x)\vec{\imath} + (3 + y)\vec{\jmath}$.

Значит, $\begin{cases} x' = -2 + x \\ y' = 3 + y \end{cases}$ или $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 3 \end{cases}$.

Подставим эти выражения в уравнение $y'^2 = 2x'$:

$$(y + 3)^2 = 2(x - 2) \Rightarrow y^2 + 6y + 9 = 2x - 4 \Rightarrow y^2 - 2x + 6y + 13 = 0.$$

Сделаем рисунок. Оси, изображенные пунктирной линией – оси новой системы координат Oxy с центром O. Оси, изображенные сплошной линией – оси старой системы $Qx'y'$, которая для параболы является канонической системой.



Ответ: $y^2 - 2x + 6y + 13 = 0$.