Лекция 16.

Кривые второго порядка.

Часть 2

На лекции будут исследованы две кривые второго порядка – гипербола и парабола.

1. Гипербола

Из школьного курса математики известно, что графиком функции, заданной уравнением $y = \frac{k}{x}$, и называемой обратной пропорциональностью, является кривая, под названием гипербола (рис. 1).

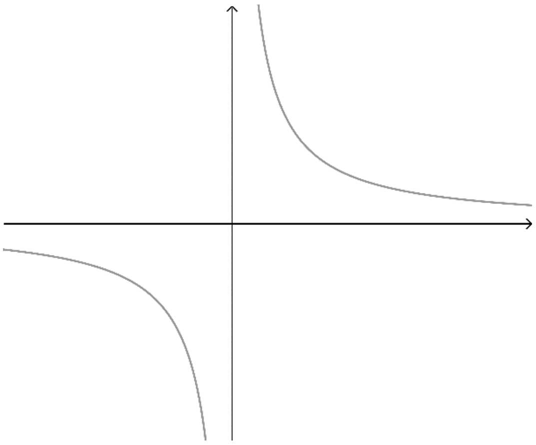

Рис. 1

Оказывается, графиком обратной пропорциональности является частный случай гиперболы, которую называют равнобочной. Дадим общее определение гиперболы и запишем ее уравнение в специально подобранной системе координат.

Гиперболой называется фигура, состоящая из множества точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 есть постоянная величина.

Точки F_1 и F_2 называются фокусами гиперболы. Расстояние между фокусами обозначают $2c$ и называют межфокусным расстоянием (рис. 2).

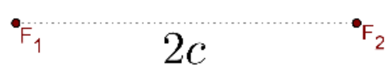

Рис. 2

Пусть точка M принадлежит гиперболе. Длины отрезков MF_1 и MF_2 называются фокальными радиусами. Согласно определению модуль разности фокальных радиусов постоянен (рис. 3), это значение обозначают $2a$:

$$||MF_1| - |MF_2|| = 2a.$$

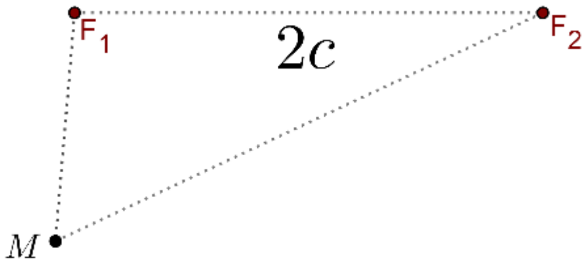

Рис. 3

Требуем, чтобы c было больше a, иначе точек с таким условием не существует:

$$0 < a < c.$$

Чтобы представить, как выглядит гипербола, можно изобразить некоторые точки, удовлетворяющие условию: рис. 4.

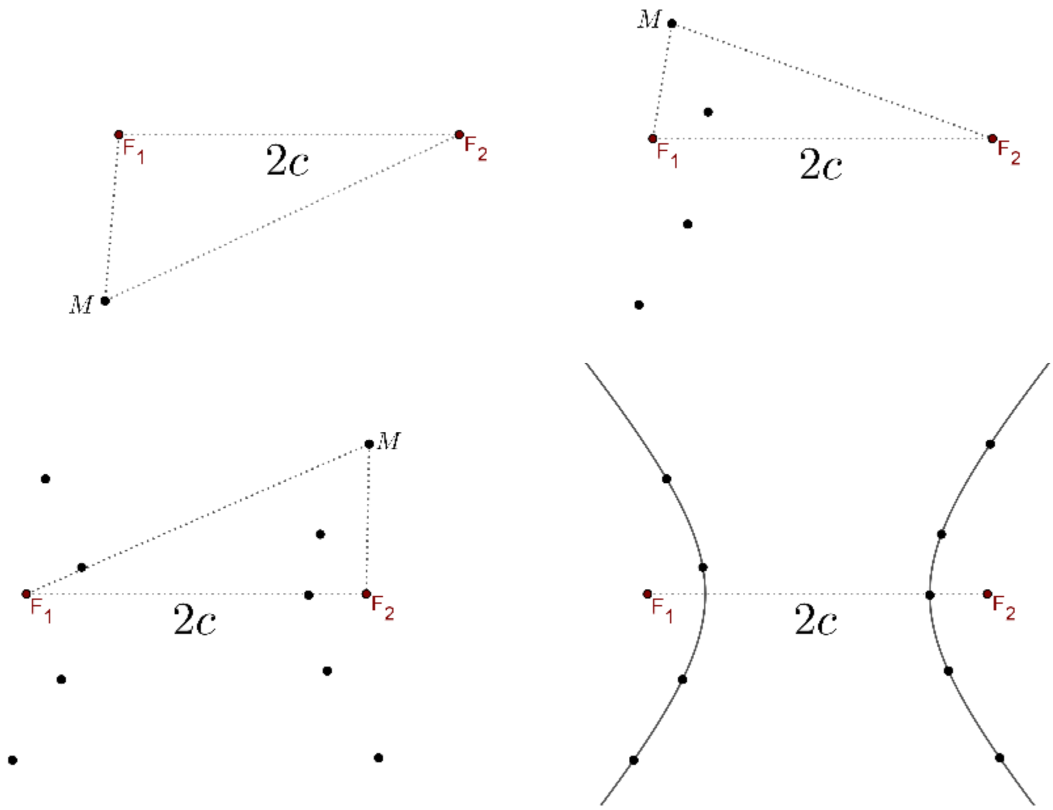

Рис. 4

Если фокусы начать сближать, то по мере их сближения гипербола вырождается в пару пересекающихся прямых (рис. 5).

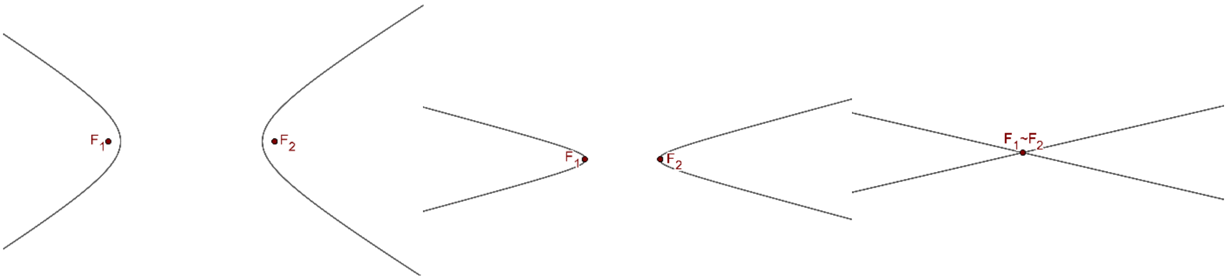

Рис. 5

Определим каноническую систему координат, в которой получим уравнение гиперболы.

Строится эта система также как для эллипса: начало координат – середина O отрезка F_1F_2 (гипербола симметричная относительно точки O, эта точка называется центром гиперболы), ось абсцисс направлена вдоль отрезка F_1F_2, ось ординат перпендикулярна оси абсцисс (рис. 6).

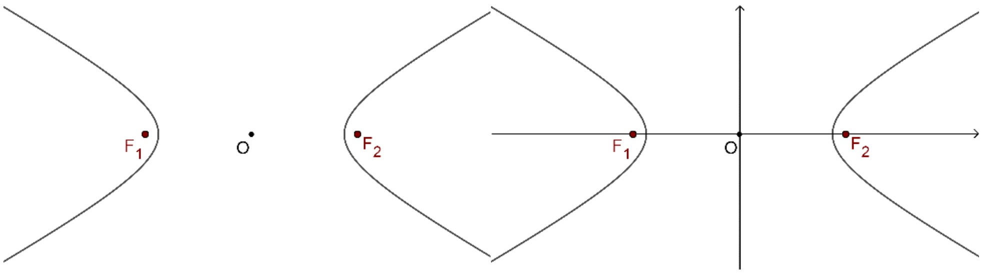

Рис. 6

Фокусы в канонической системе координат имеют абсциссы c и $(-c)$ (рис. 7).

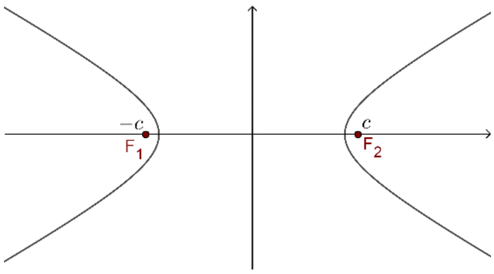

Рис. 7

Отложим точки a и $(-a)$ на оси абсцисс. Эти точки называются действительными вершинами гиперболы, они принадлежат гиперболе (рис. 8).

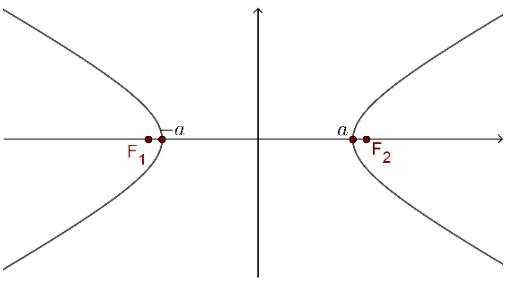

Рис. 8

Введем параметр $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Точки b и $(-b)$ отложим на оси ординат, их называют *мнимыми вершинами*, они не принадлежат гиперболе (рис. 9).

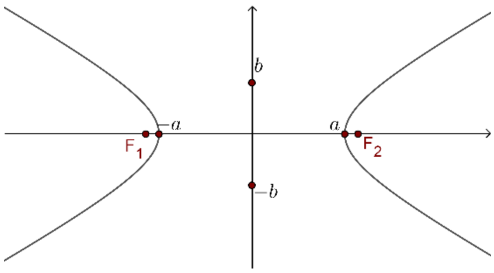

Рис. 9

Параметры a и b называются полуосями гиперболы: a – действительная полуось, b – *мнимая полуось*.

Указанные точки a, $(-a)$, b, $(-b)$ позволяют получить опорный прямоугольник.

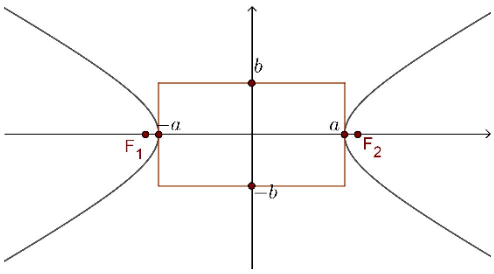

Рис. 10

Прямые, содержащие диагонали опорного прямоугольника, называются асимптотами гиперболы (рис. 11). Гипербола неограниченно приближается к своим асимптотам, но не пересекает их.

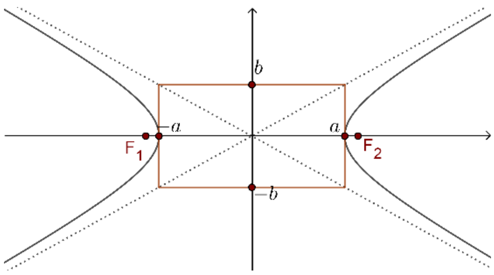

Рис. 11

Асимптоты могут быть заданы уравнениями с угловыми коэффициентами:

$$l_1 : y = \frac{b}{a}x, \quad l_2 : y = -\frac{b}{a}x.$$

Уравнение гиперболы в ее канонической системе координат получается такими же преобразованиями, которые выполнялись при выводе уравнения эллипса.

Берем произвольную точку M, лежащую на гиперболе. Учитывая определение, составляем равенство, левую часть которого расписываем через координаты точки M и фокусов, возводим в квадрат, упрощаем.

$$M(x,\ y) \in \Gamma \Leftrightarrow |MF_1 - MF_2| = 2a$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a$$

$$\ldots$$

$$\Leftrightarrow x^2(c^2 - a^2) - y^2a^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Разность $c^2 - a^2$ заменяем на b^2, после чего получаем уравнение:

$$\overset{a^2(c^2-a^2)\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$$

$$\overset{b=\sqrt{c^2-a^2}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

называемое каноническим уравнением гиперболы.

Для гиперболы, также как для эллипса, можно ввести понятие касательной (рис. 12).

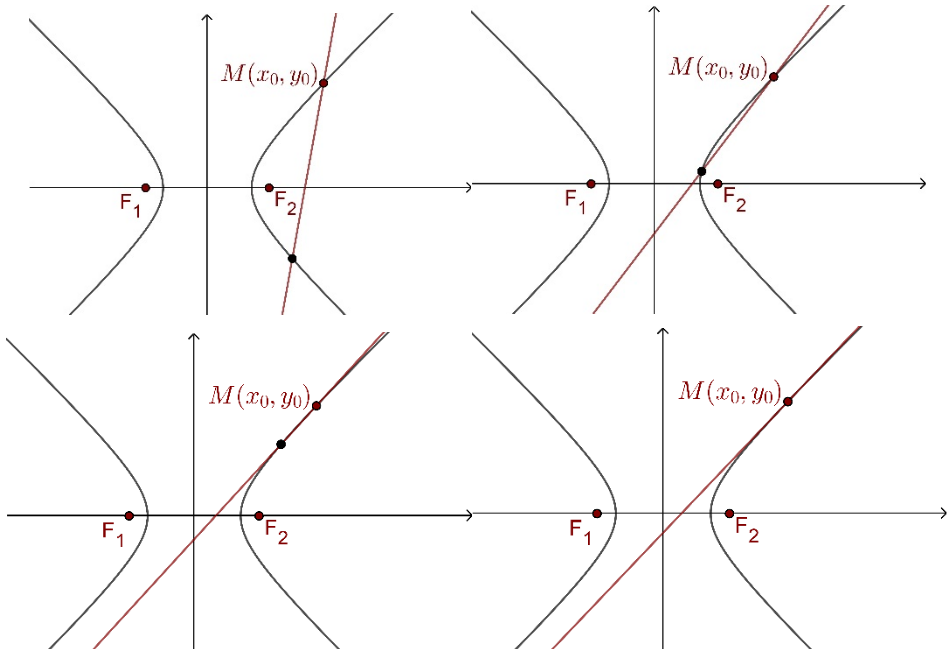

Рис. 12

Касательная к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке с координатами (x_0, y_0) задается в канонической системе координат уравнением

$$\frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y = 1.$$

Для примера возьмем действительную вершину гиперболы с координатами $(a; 0)$: рис. 13.

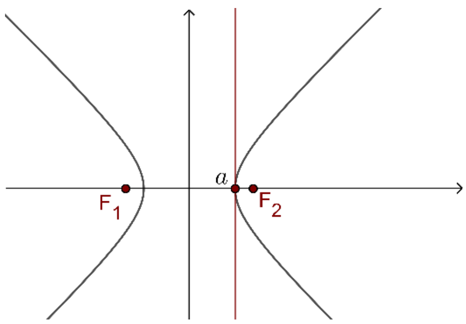

Рис. 13

Уравнение касательной в этой точке примет вид:

$$\frac{a}{a^2}x - \frac{0}{b^2}y = 1$$

$$\text{или} \quad x = a.$$

Таким образом, гипербола касается внешним образом боковых сторон опорного прямоугольника.

Оптическое свойство гиперболы состоит в том, что лучи света, вышедшие из одного фокуса гиперболы, после отражения от ближайшей ветви гиперболы имеют направление вектора, идущего от второго фокуса к точке отражения (рис. 14).

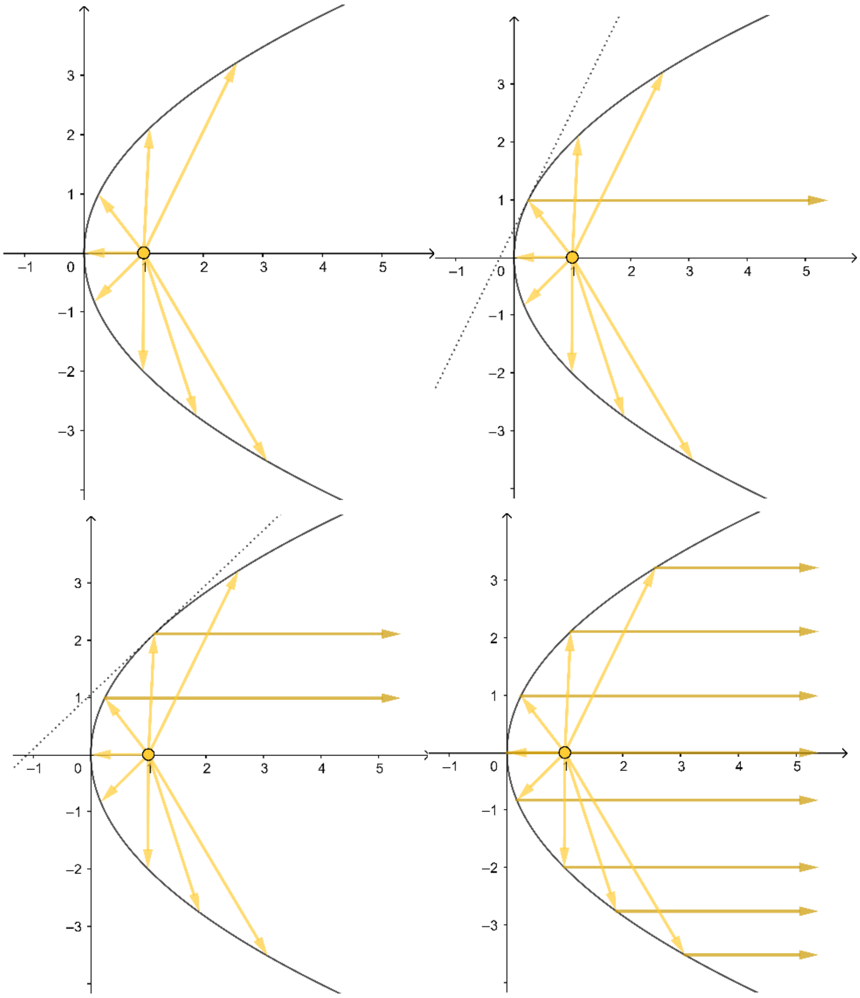

Рис. 14

При вращении гиперболы вокруг ее действительной оси получается двуполостный гиперболоид вращения – поверхность второго порядка. Он обладает тем же оптическим свойством.

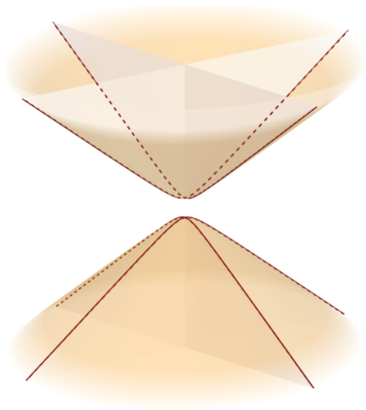

Рис. 15

Для гиперболы, как и для эллипса, вводится понятие эксцентриситета. Эксцентриситет, обозначаемый через ε, равен отношению параметров c и a:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Так как $0 < a < c$, то $\varepsilon > 1$.

С увеличением $\varepsilon = \frac{c}{a}$ отношение $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1}$ также увеличивается, то есть растет величина угла между асимптотами в правой полуплоскости от оси ординат, поэтому ветви гиперболы «вытягиваются» вдоль оси ординат (рис. 15).

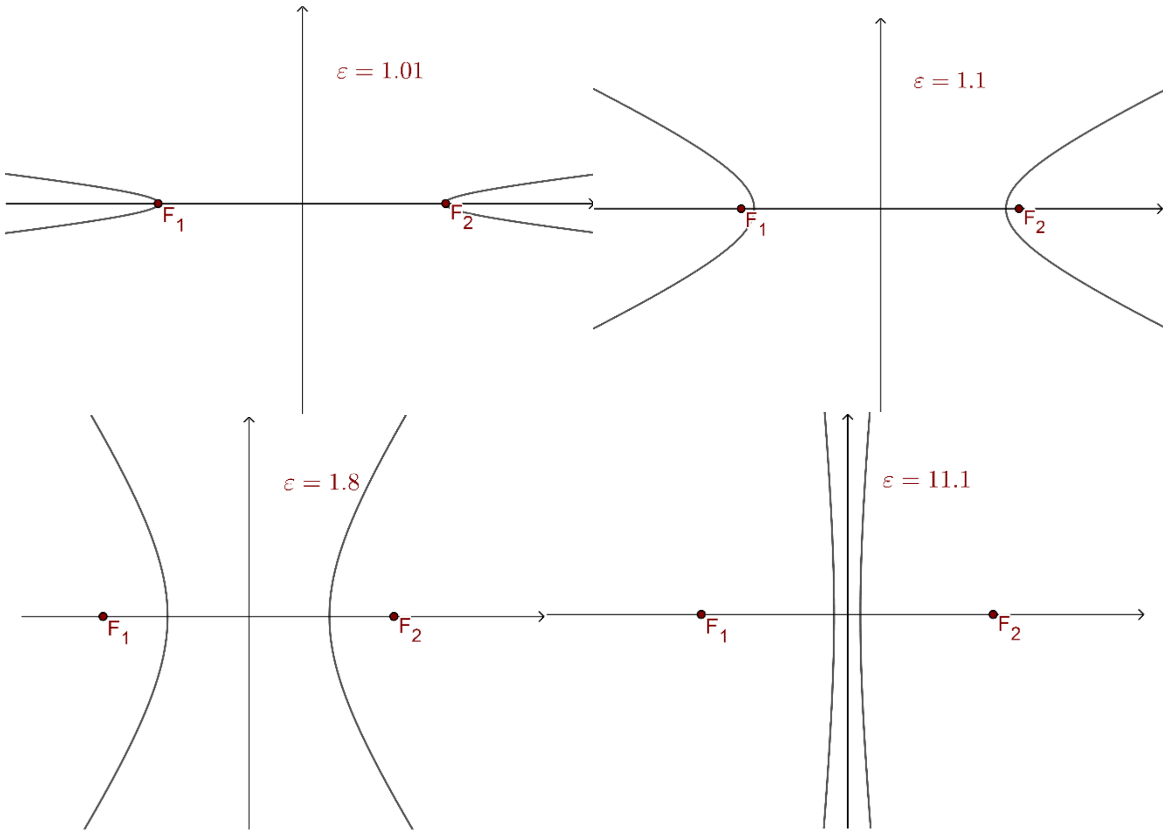

Рис. 16

Покажем, что график функции $y = \frac{k}{x}$ является гиперболой.

Пусть $k > 0$. Выполним поворот на угол 45° по часовой стрелке вокруг точки O. Каждая точка M перейдет в некоторую точку M' (рис. 16).

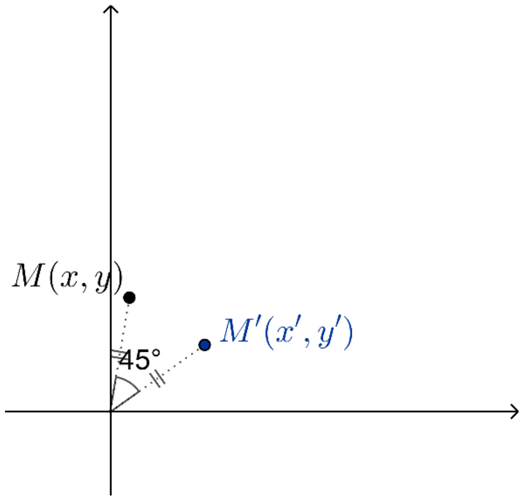

Рис. 17

Применив формулы поворота, можно доказать, что координаты точки $M'(x', y')$, полученной поворотом из точки графика обратной пропорциональности (рис. 17), удовлетворяют уравнению гиперболы

$$\frac{x'^2}{2k} - \frac{y'^2}{2k} = 1 \text{ с полуосями } a = b = \sqrt{2k}.$$

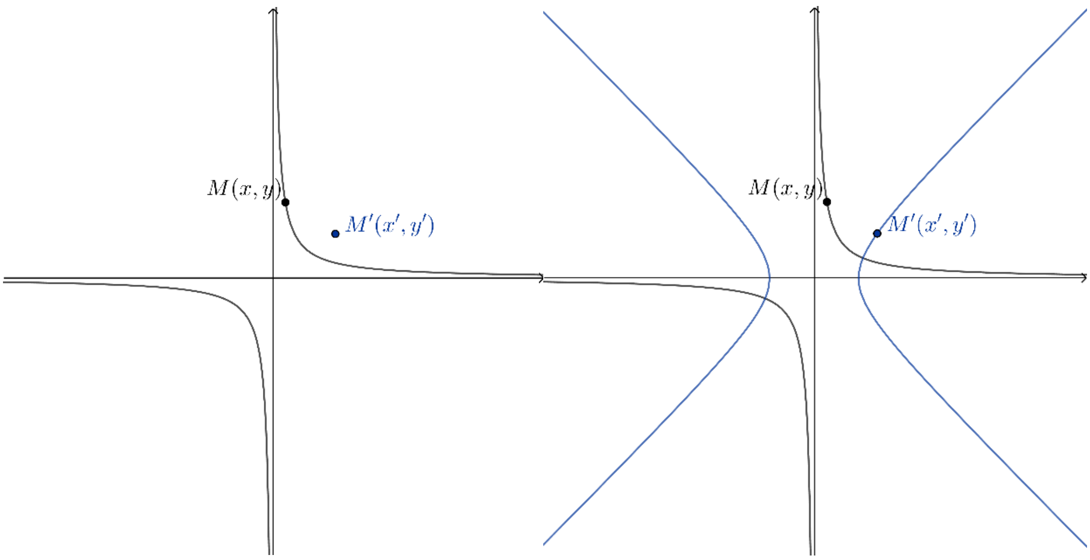

Рис. 18

Гиперболу с равными полуосями называют равнобочной.

Теперь покажем, что произвольную гиперболу можно получить из равнобочной гиперболы с помощью операции сжатия, описанной на прошлой лекции.

Возьмем равнобочную гиперболу (рис. 18), заданную каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

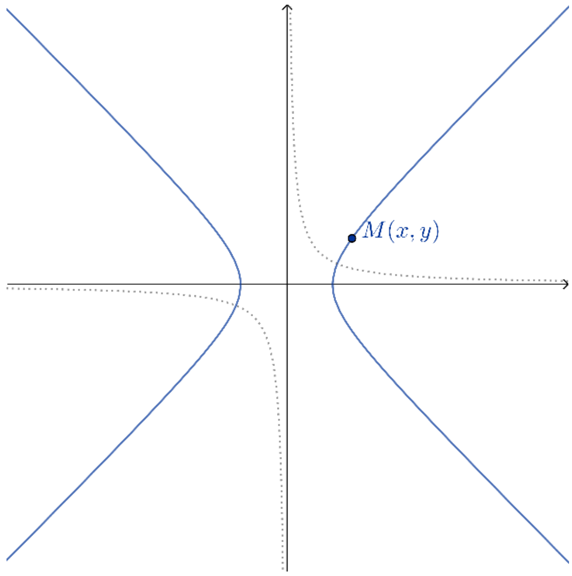

Рис. 19

Выполним преобразование сжатия к оси абсцисс с коэффициентом $\frac{b}{a}$ (рис. 19).

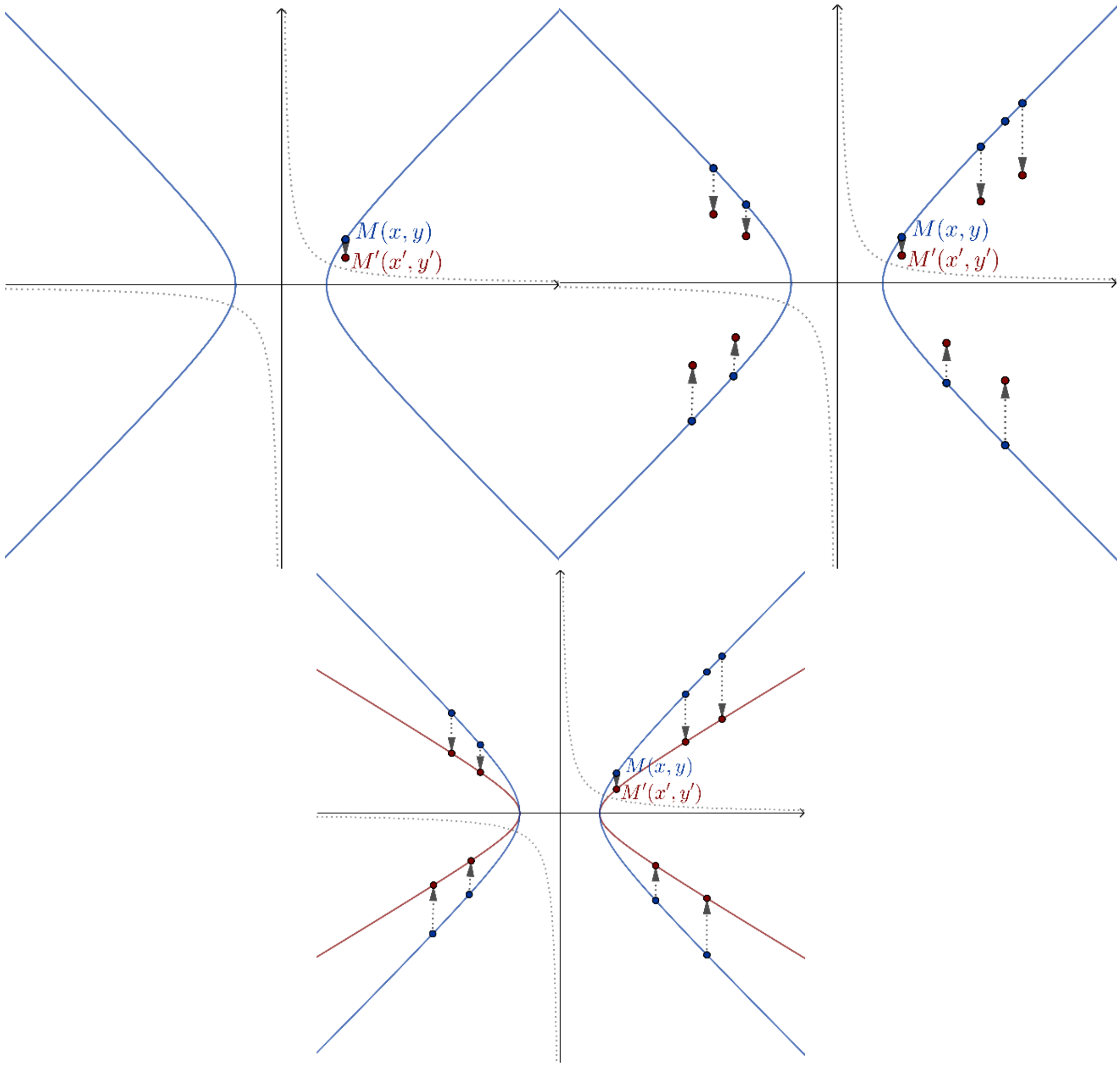

Рис. 20

Имеем:

$$M(x, y) \xrightarrow{f} M(x', y') :\ x' = x, y' = \frac{b}{a}y.$$

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ примет вид

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{ay'}{b}\right)^2}{a^2} = 1$$

$$\text{или } \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Имеем гиперболу с полуосями a и b.

2. Парабола

В школьном курсе математики параболой называют график квадратичной зависимости

$$y = ax^2 + bx + c.$$

При этом график указанной функции можно получить из графика функции $y = kx^2$ с помощью переноса вдоль осей координат (рис. 20).

$$y = kx^2 \ \rightarrow \ y = ax^2 + bx + c$$

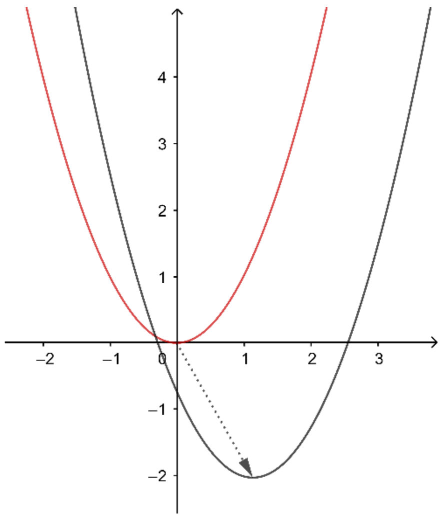

Рис. 21

Дадим определение параболы как геометрической фигуры, а затем составим ее уравнение.

Параболой называется фигура, состоящая из множества точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки F и данной прямой l.

Точку F называют фокусом, а прямую l – директрисой (рис. 21).

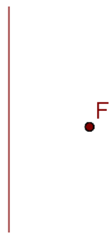

Рис. 22

Расстояние p от фокуса до директрисы называется фокальным параметром параболы (рис. 22).

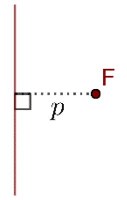

Рис. 23

Пусть точка M принадлежит параболе. Согласно определению расстояния от точки M до фокуса и до директрисы одинаковые:

$$|MF| = d(M,\ l).$$

Чтобы представить, как выглядит парабола, можно изобразить некоторые точки, удовлетворяющие указанному условию: (рис. 23).

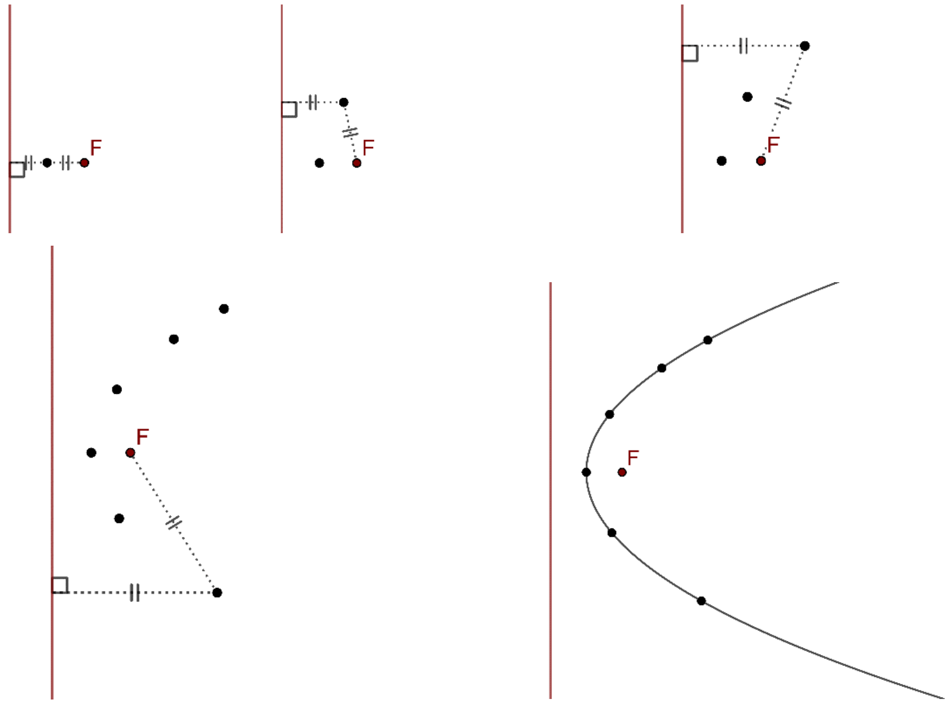

Рис. 24

Если фокусы начать приближать к директрисе, то парабола «сужается» (рис. 24).

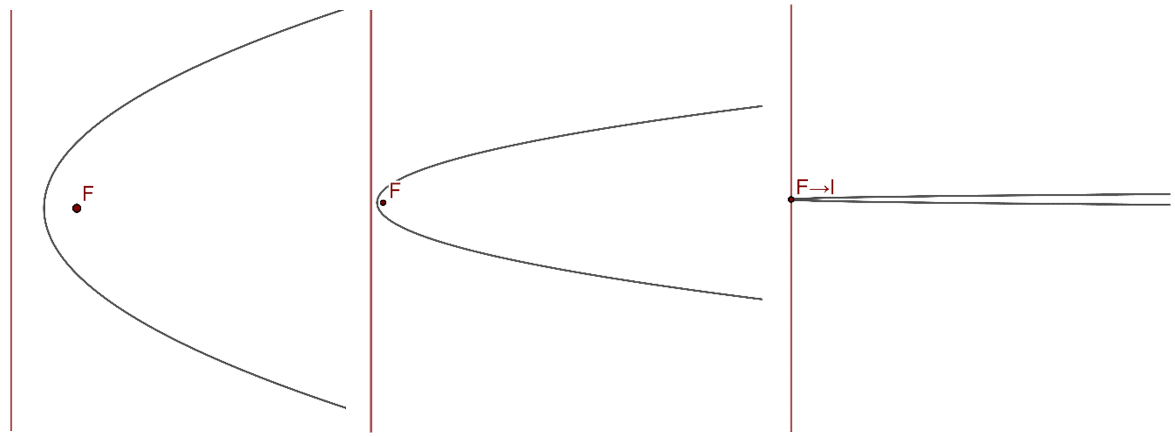

Рис. 25

Введем каноническую систему координат параболы.

Начало координат – это середина O перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису, ось абсцисс – это прямая OF, направленная от O к F (рис. 25).

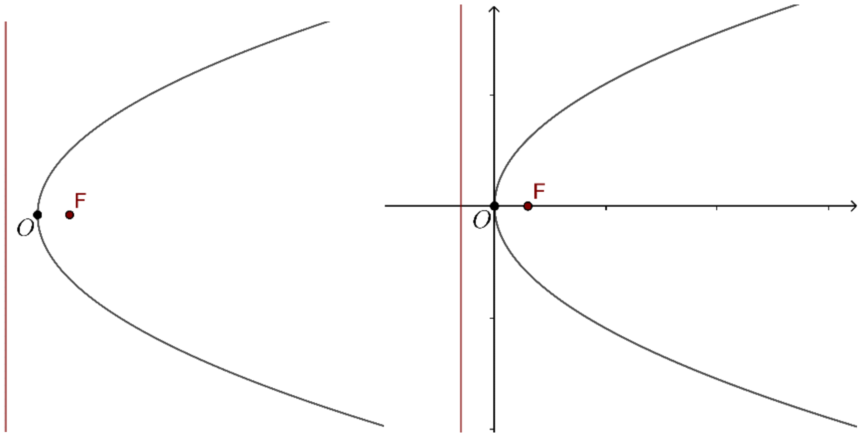

Рис. 26

Точку O называют вершиной параболы. Парабола симметрична относительно оси абсцисс, поэтому эту ось называют осью симметрии параболы.

В канонической системе координат фокус F получает координаты $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$. Директриса l задается уравнением $x = -\frac{p}{2}$ (рис. 26).

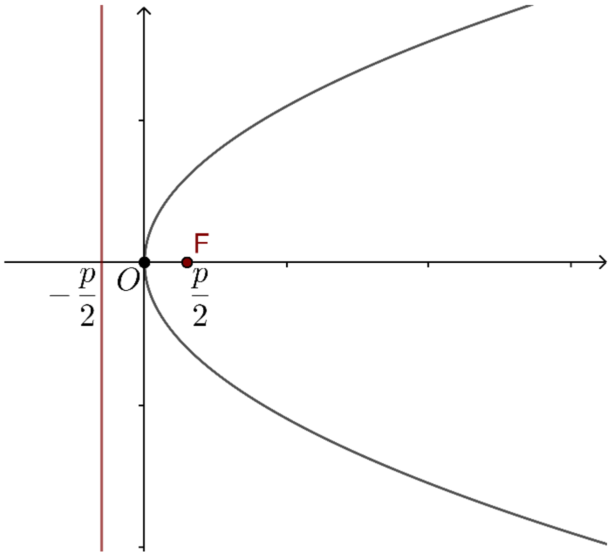

Рис. 27

Выведем в канонической системе координат уравнение параболы.

Точка M, лежащая на параболе, удовлетворяет равенству $|MF| = d(M,\ l)$, где $d(M,\ l)$ – расстояние от M до директрисы l (рис. 27).

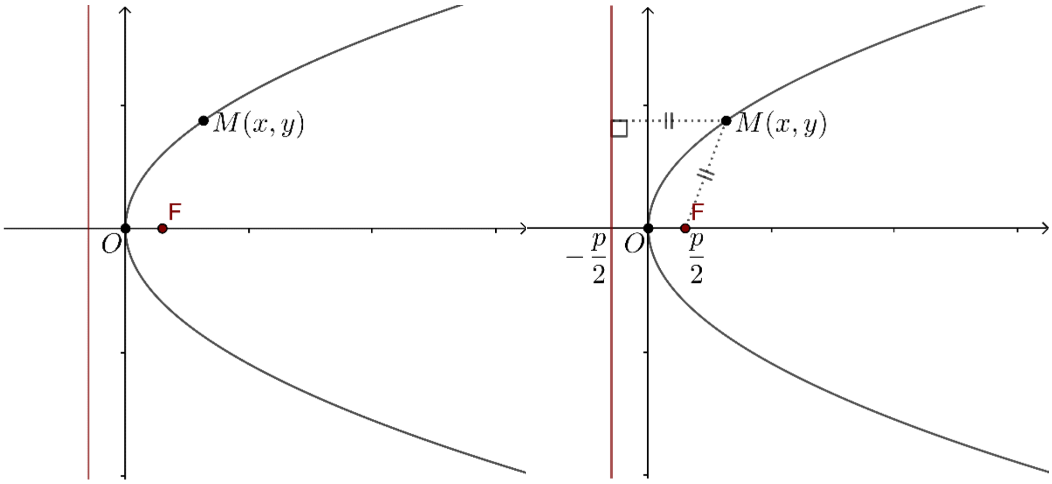

Рис. 28

Итак,

$$M(x,\ y) \in \Pi \Leftrightarrow |MF| = d(M,\ l)$$

Выразив левую и правую части этого равенства через координаты точки M, получим уравнение

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|,$$

которое возводим в квадрат, упрощаем и получаем:

$$\overset{\text{обе части } \geq 0}{\Leftrightarrow} \quad x^2 - 2x\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + 2x\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow y^2 = 2px.$$

Полученное уравнение называется канонический уравнением параболы.

Выразим из этого уравнения переменную x:

$$y^2 = 2px \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2p}y^2.$$

Имеем квадратичную функцию вида $x = ky^2$ (зависимость переменной x от переменной y). Если поменять названия осей координат, то получится функция $y = kx^2$. Итак, графиком квадратичной функции действительно является парабола.

Касательная к параболе $y^2 = 2px$ в $(x_0,\ y_0)$ в канонической системе координат задается уравнением:

$$p(x + x_0) = yy_0.$$

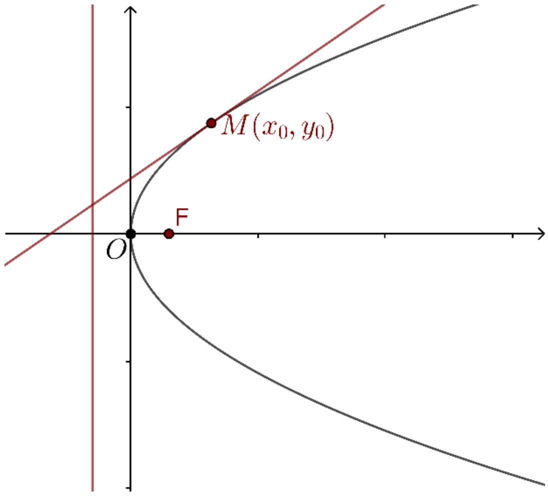

Рис. 29

Рассмотрим оптическое свойство параболы.

Если в фокусе параболы поместить точечный источник света (лампочку), то лучи, отразившись от параболы, пойдут параллельно оси симметрии параболы (рис. 29).

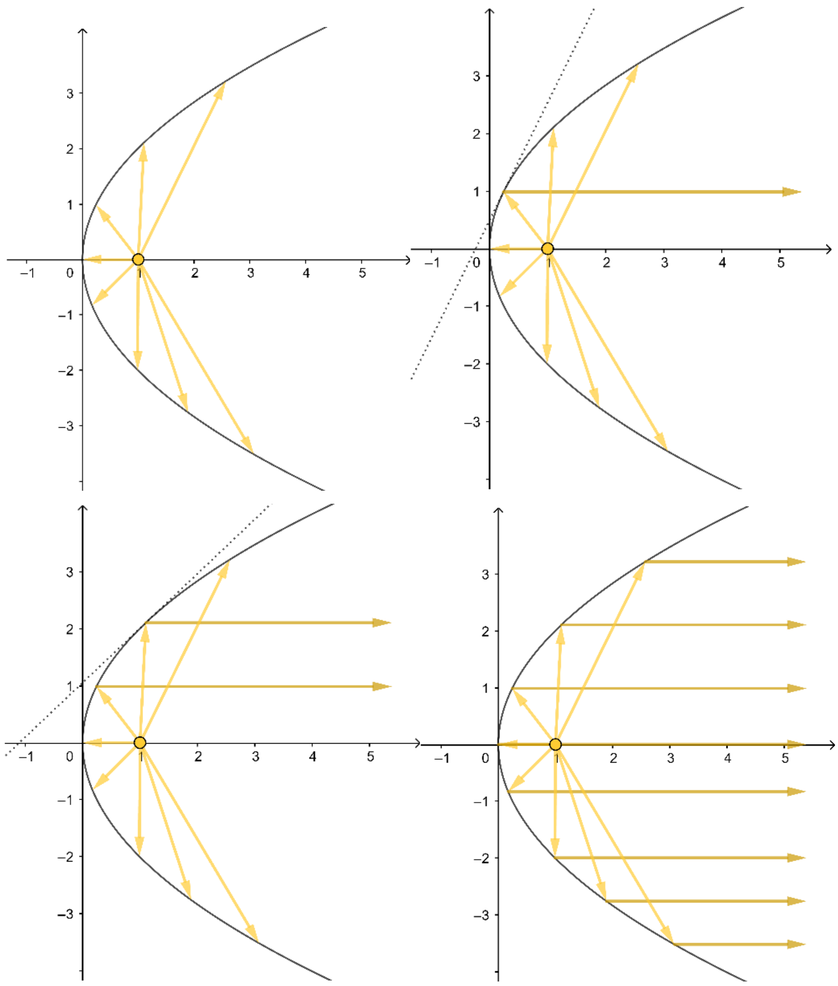

Рис. 30

Верно и обратное утверждение: если на параболу падает поток лучей, параллельных оси симметрии, то, отразившись от параболы, лучи попадут в фокус.

При вращении параболы вокруг ее оси симметрии получается параболоид вращения – поверхность второго порядка. Он обладает тем же оптическим свойством.

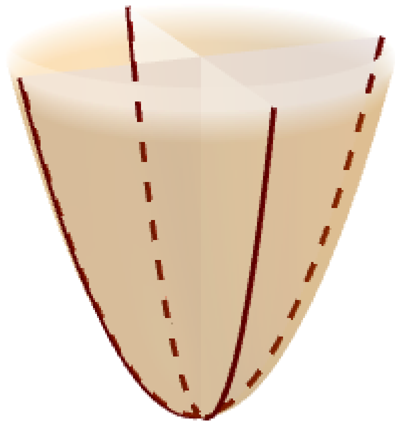

Рис. 31

Рассмотрим пространственную фигуру, в сечениях которой может получиться любая кривая второго порядка.

Возьмем окружность и не лежащую в ее плоскости точку *K* (рис. 32.).

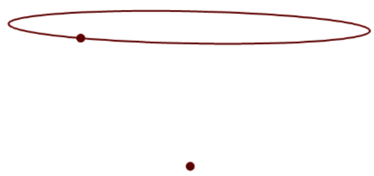

Рис. 32

Соединим эту точку с произвольной точкой окружности прямой линией (рис. 33).

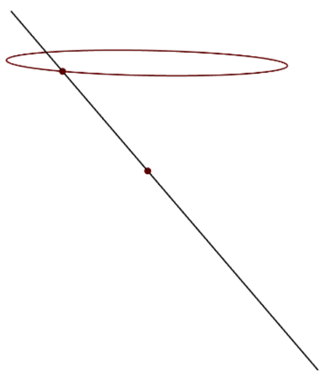

Рис. 33

Множество всех таких прямых образует поверхность, называемую конусом (рис. 34).

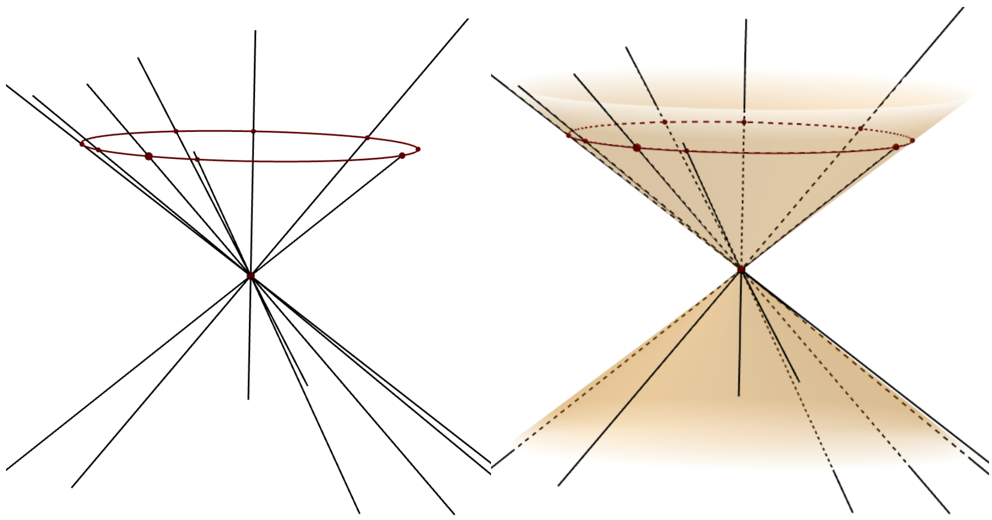

Рис. 34

Точка K называется вершиной конуса.

Если конус пересекать различными плоскостями, то в сечении может получиться эллипс (в частности, окружность), гипербола, парабола (рис. 35).

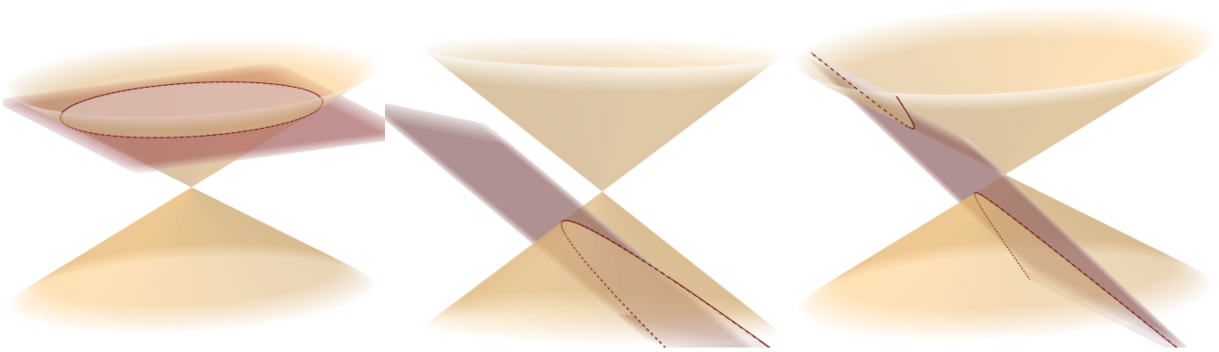

Рис. 35

Очевидно, что если секущая плоскость будет проходить через вершину конуса, то получатся вырожденные сечения: точка, прямая и пара прямых.

Итак, рассмотренные нами кривые второго порядка связаны друг с другом. Проиллюстрируем это немного иначе.

Понятие директрисы было определено лишь для параболы. Однако подобные прямые можно определить и для двух других линий. Директрисы эллипса и гиперболы задаются в канонической системе координат уравнениями $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$. Каждая директриса обладает свойством: отношение расстояния от произвольной точки кривой до фокуса к расстоянию от той же точки до соответствующей директрисы есть величина постоянная (рис. 36).

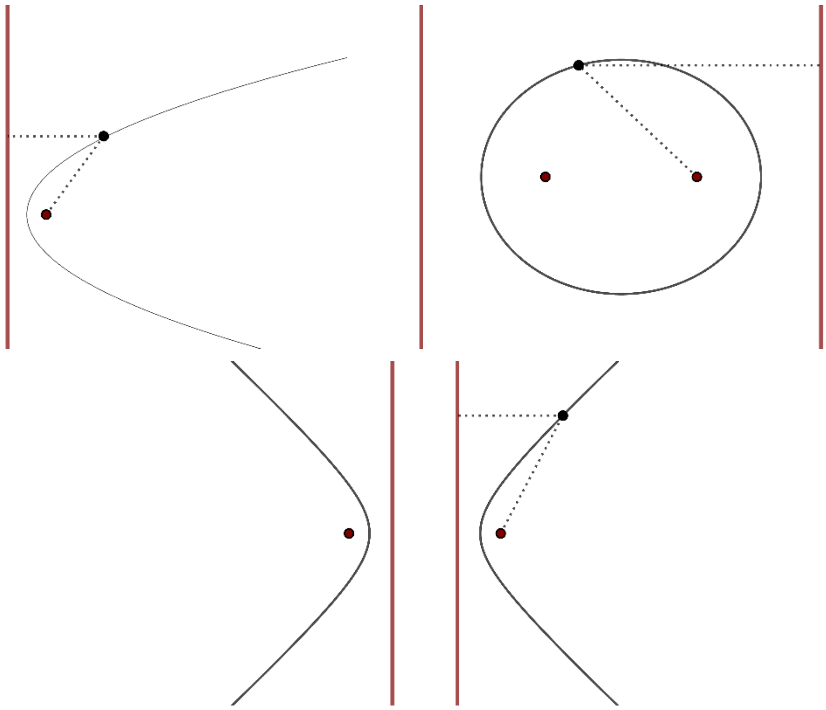

Рис. 36

Имеет место

Теорема. *Для прямой* l, *точки* $F \notin l$, *числа* $\varepsilon > 0$, *множество точек* M, *удовлетворяющих равенству*

$$|MF| = \varepsilon \cdot d(M,\ l),$$

определяет кривую второго порядка, которая

при ε < 1 *является эллипсом* (*отличным от окружности*),

при ε = 1 – *параболой*,

при ε > 1 – *гиперболой*.

Для эллипса и гиперболы число ε мы называли эксцентриситетом. Для параболы тоже можно использовать это понятие, считая, что эксцентриситет параболы равен 1.

Чтобы записать все три линии второго порядка единым уравнением, введем понятие фокального параметра *p* для эллипса и гиперболы: $p = \frac{b^2}{2}$.

Тогда все три кривые второго порядка – эллипс, параболу, гиперболу, можно задать единым уравнением (при соответствующем значении параметра ε):

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 - 2px + y^2 = 0.$$

Проиллюстрируем это, нарисовав линии для разных значений параметра ε: рис. 37 - 39.

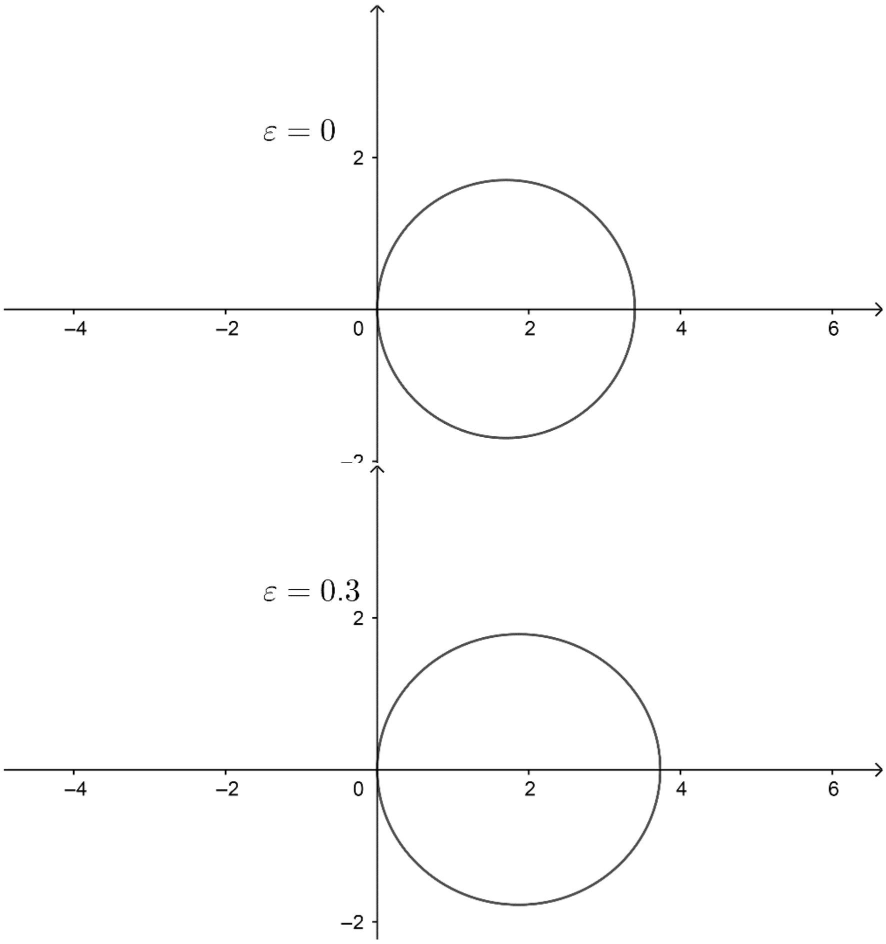

Рис. 37

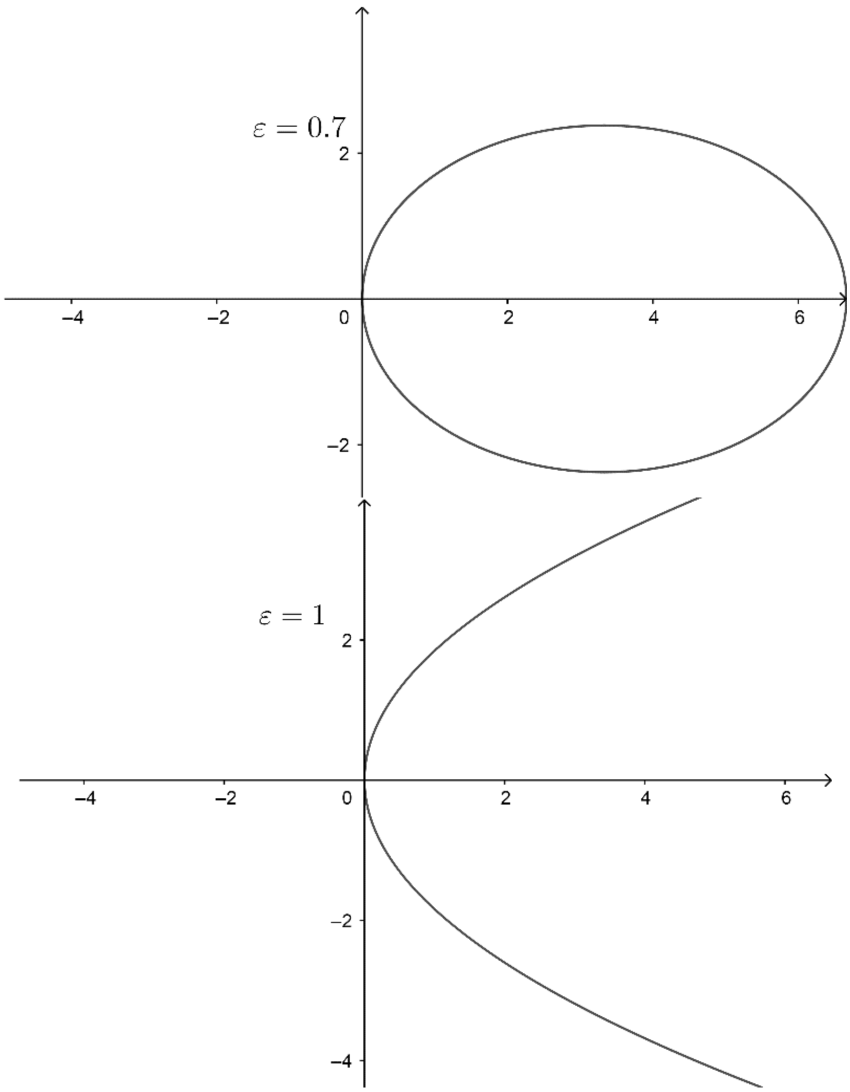

Рис. 38

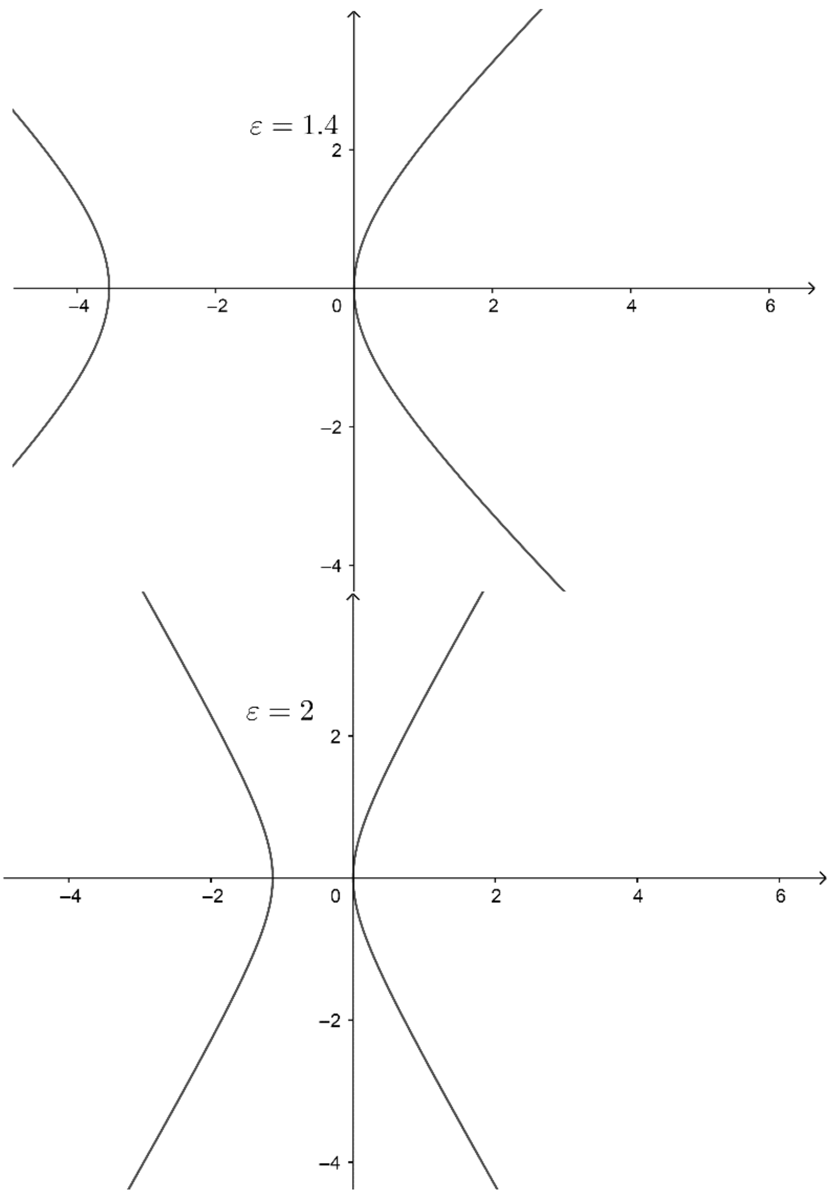

Рис. 39