Взаимное расположение плоскостей, прямой и плоскости

Задача 1. Покажите, что плоскости, заданные уравнениями

$$x - y - 1 = 0 \text{ и } 2x + y + 3z + 1 = 0$$

пересекаются по прямой. Запишите каноническое уравнение этой прямой.

Решение. а) Запишем координаты нормальных векторов плоскостей: $\vec{a}(1; -1; 0)$ и $\vec{b}(2; 1; 3)$. Так как координаты векторов не пропорциональны, векторы не коллинеарны, значит, плоскости пересекаются по некоторой прямой l.

Можно поставить вопрос: будут ли плоскости перпендикулярны? Вычислим скалярное произведение нормальных векторов: $\vec{a}\vec{b} = 2 - 1 = 1 \neq 0$. Значит, плоскости не перпендикулярны.

Множество точек прямой l является решением системы уравнений

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x + y + 3z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Решим эту систему. Она должна иметь бесконечно много решений, поэтому при приведении ее к ступенчатому виду появится свободная переменная. Вычтем из второго уравнения два первых, после чего объявим переменную z свободной и выразим остальные переменные через z:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 3y + 3z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 = -z - 1 + 1 = -z \\ y = -z - 1 \end{cases}.$$

Обозначим $z = t$, получим систему равенств:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = -1 - t, \\ z = t \end{cases} \text{ где } t \text{ – любое число.}$$

Эту систему можно рассматривать как систему параметрических уравнений прямой l. Найдем каноническое уравнение. Для этого нужен направляющий вектор и точка прямой. Из системы параметрических уравнений эти объекты легко найти: координаты вектора – это коэффициенты при параметре t, то есть тройка $(-1; -1; 1)$, а координаты точки – любое решение системы, например, при значении $t = 0$ получаем точку $M(0; -1; 0)$.

Имеем каноническое уравнение прямой l: $\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$.

Ответ: $\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$.

Задача 2. Определите, при каких значениях a и b плоскости, заданные уравнениями

$$2x + by + 3z - 5 = 0 \text{ и } ax - 6y - 6z + 2 = 0$$

параллельны. Вычислите расстояние между этими плоскостями.

Решение. Нормальные векторы плоскостей: $\vec{p}(2; b; 3)$ и $\vec{q}(a; -6; -6)$. Чтобы плоскости были параллельны, необходимо, чтобы $\vec{p}||\vec{q}$. Запишем условие коллинеарности векторов, равносильное пропорциональности координат, и выведем из него значения параметров a и b:

$$\frac{2}{a} = \frac{b}{-6} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -4,\ b = 3.$$

Имеем уравнения: $2x + 3y + 3z - 5 = 0$ и $-4x - 6y - 6z + 2 = 0$.

Отметим, что коллинеарность нормальных векторов не исключает случай совпадения плоскостей. Если плоскости совпадают, то строки из всех коэффициентов уравнений должны быть пропорциональны. Однако отношение свободных членов равно $\frac{-5}{2} = -2{,}5 \neq -\frac{1}{2}$. Значит, данные плоскости различны.

Для вычисления расстояния между плоскостями надо найти расстояние от произвольной точки одной плоскости до другой. Найдем любую точку, лежащую в первой плоскости $2x + 3y + 3z - 5 = 0$. Это, например, точка $M(1; 1; 0)$. Найдем расстояние d от M до второй плоскости, которая может быть задана уравнением (поделим обе части исходного уравнения на (–2)):

$$2x + 3y + 3z - 1 = 0.$$

Применим формулу, выведенную на прошлом практическом занятии:

$$d = \frac{|2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 3\cdot 0 - 1|}{\sqrt{4+9+9}} = \frac{4}{\sqrt{22}} \approx 0{,}85.$$

Ответ: $a = -4$, $b = 3$, расстояние $d = \frac{4}{\sqrt{22}}$.

Задача 3. Выясните взаимное расположение прямой и плоскости, заданных уравнениями $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$ и $x + 2y - 2z + 6 = 0$.

Решение. Направляющий вектор прямой: $\vec{a}(-2; 3; 2)$.

Нормальный вектор плоскости: $\vec{n}(1; 2; -2)$.

Для выяснения взаимного расположения прямой и плоскости используем следующую идею.

Если $\vec{a}$ и $\vec{n}$ не ортогональны, то прямая пересекает плоскость ровно в одной точке. Если $\vec{a}$ и $\vec{n}$ ортогональны, то прямая либо параллельна плоскости (не имеет с ней общих точек), либо лежит в плоскости.

Вычислим скалярное произведение $\vec{a}\vec{b} = -2 + 6 - 4 = 0$. Значит, $\vec{a} \perp \vec{n}$. Итак, либо у прямой и плоскости нет общих точек, либо все точки прямой являются точками плоскости. По каноническому уравнению найдем точку, лежащую на прямой: $M(-2; 1; 3)$. Проверим, лежит ли она в плоскости:

$$-2 + 2\cdot 1 - 2\cdot 3 + 6 = 0.$$

Так как координаты *M* удовлетворяют уравнению плоскости, то *M* лежит в этой плоскости. Значит, вся прямая лежит в плоскости.

Ответ: Прямая лежит в плоскости.