Уравнение плоскости

Задача 1. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; 2; -1)$ параллельно векторам $(2; 0; 3)$ и $(-2; 3; 0)$.

Решение. Составляем вначале каноническое уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладываем определитель по первой строке и приводим подобные слагаемые:

$$(x-1)\cdot(-9) - (y-2)\cdot 6 + (z+1)\cdot 6 = 0,$$
$$-9x - 6y + 6z + (9 + 12 + 6) = 0,$$
$$-9x - 6y + 6z + 27 = 0 \ \mid : (-3),$$
$$3x + 2y - 2z - 9 = 0.$$

Ответ: $3x + 2y - 2z - 9 = 0$.

Задача 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(5; -3; 0)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{-2}$.

Решение. Указанная прямая имеет направляющий вектор $\vec{a}(1; 2; -2)$. Этот вектор является нормальным вектором для искомой плоскости, так как плоскость должна быть перпендикулярна прямой.

Составляем уравнение плоскости, проходящей через точку $M(5; -3; 0)$ перпендикулярно вектору $\vec{a}(1; 2; -2)$:

$$1\cdot(x-5) + 2\cdot(y+3) - 2\cdot(z-0) = 0,$$
$$x + 2y - 2z - 5 + 6 = 0,$$
$$x + 2y - 2z + 1 = 0.$$

Ответ: $x + 2y - 2z + 1 = 0$.

Задача 3. Как найти расстояние от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $ax + by + cz + d = 0$?

Решение. Задача решается аналогично задаче о поиске расстояния от точки до прямой, заданных в двумерной системе координат.

Расстояние от точки M до плоскости α – это длина перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость α. Пусть H – основание этого перпендикуляра. Надо найти длину отрезка MH. Обозначим эту длину через d.

Точка H имеет некоторые координаты $(x; y; z)$, удовлетворяющие равенству $ax + by + cz + d = 0$.

Пусть $\vec{n}$ – нормальный вектор плоскости α. Так как отрезок MH перпендикулярен прямой, то вектор $\overrightarrow{MH}$ коллинеарен вектору $\vec{n}$. Тогда модуль скалярного произведения этих векторов равен произведению их длин:

$$\left|\overrightarrow{MH}\cdot\vec{n}\right| = \left|\overrightarrow{MH}\right|\cdot|\vec{n}| = d\cdot|\vec{n}| \Rightarrow d = \frac{\left|\overrightarrow{MH}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|} \ (*).$$

Так как $\overrightarrow{MH}(x-x_0; y-y_0; z-z_0)$, $\vec{n}(a;b;c)$, то вычисляем:

$$\overrightarrow{MH}\cdot\vec{n} = (x-x_0)a + (y-y_0)b + (z-z_0)c = \underbrace{ax+by+cz}_{-d} - ax_0 - by_0 - cz_0,$$

$$\overrightarrow{MH}\cdot\vec{n} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d,$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Подставляем в равенство (*), учитывая знак модуля. Получаем формулу:

$$d = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Ответ. $d = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.