Лекция.

Уравнение плоскости.
Взаимное расположение прямой и плоскости

На лекции исследуется уравнение плоскости, описываются способы составления уравнения плоскости (то есть аналитического задания плоскости), рассматриваются варианты взаимного расположения прямой и плоскости в трехмерном пространстве.

1. Уравнение плоскости

Пусть в трехмерном пространстве задана прямоугольная система координат. Тогда любая плоскость в этом пространстве может быть задана линейным уравнением с тремя переменными, в котором хотя бы один коэффициент при переменных не равен 0:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

где $a \neq 0$, или $b \neq 0$, или $c \neq 0$ $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$.

Такое уравнение называют общим уравнением плоскости (рис. 1).

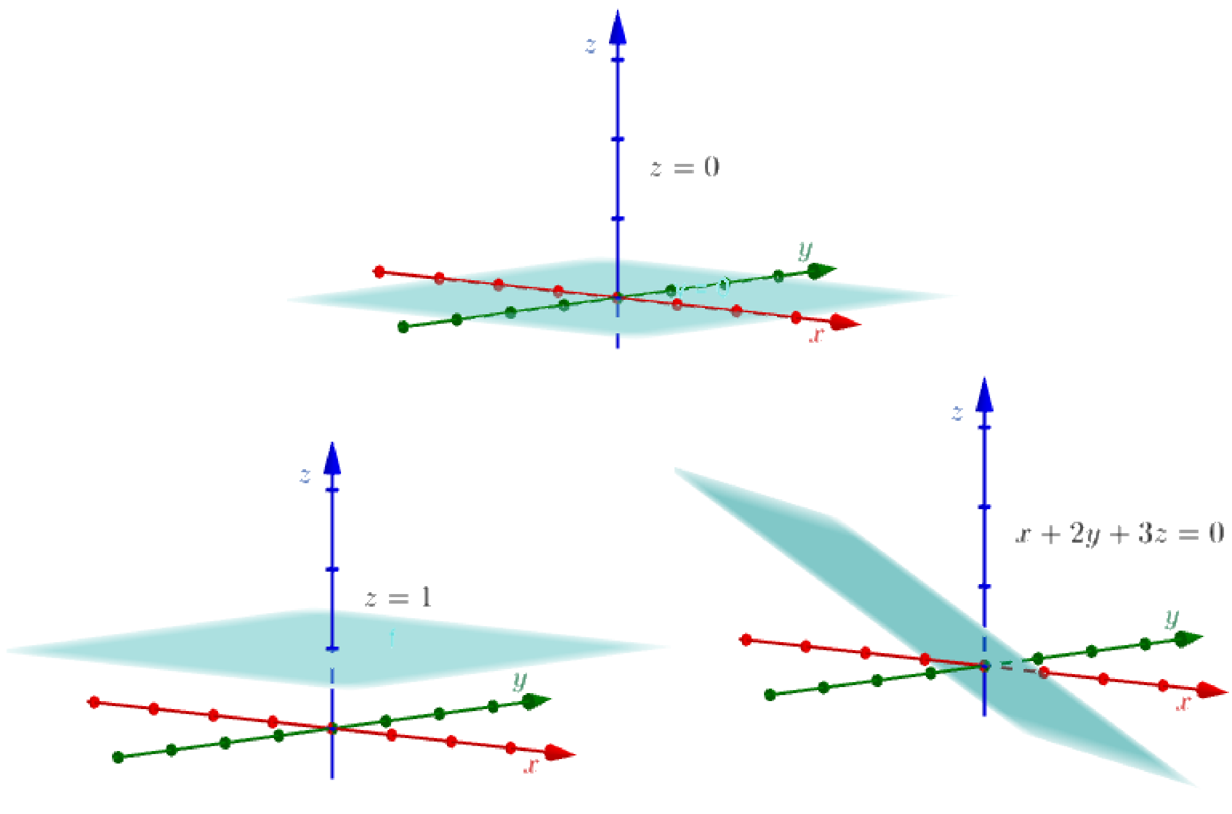

Рис. 1

Рассмотрим основные способы составления уравнения плоскости.

Обозначим произвольную плоскость буквой α греческого алфавита.

Геометрически плоскость α может быть однозначно задана (рис. 2):

а) тремя точками плоскости α, не лежащими на одной прямой (такие точки называются неколлинеарными токами);

б) точкой на плоскости α и двумя неколлинеарными векторами, параллельными этой плоскости (такие векторы называются направляющими векторами плоскости);

в) точкой на плоскости α и ненулевым вектором, перпендикулярным α (такой вектор называют нормальным вектором плоскости).

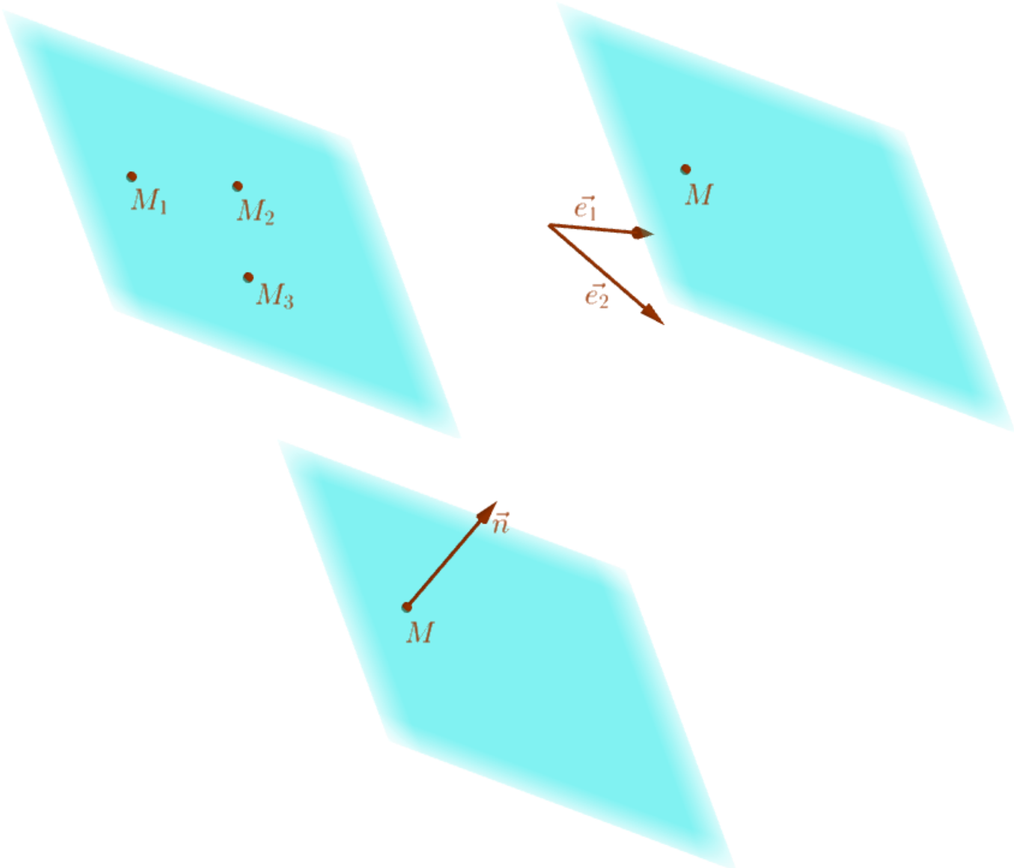

Рис. 2

Исследуем вначале случай, когда плоскость задана точкой $M_0(x_0,\ y_0, z_0)$ и двумя направляющими векторами $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. Выведем уравнение плоскости (рис. 3).

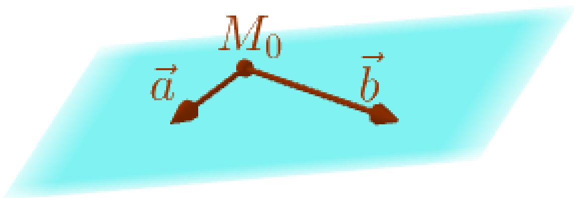

Рис. 3

Аналитически плоскость можно задать через систему параметрических уравнений. Проведем рассуждения.

Точка M с координатами (x, y, z) принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда отрезок M_0M лежит в плоскости, а это равносильно тому, что векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ компланарны, то есть линейно зависимы, при этом направляющие векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (рис. 4).

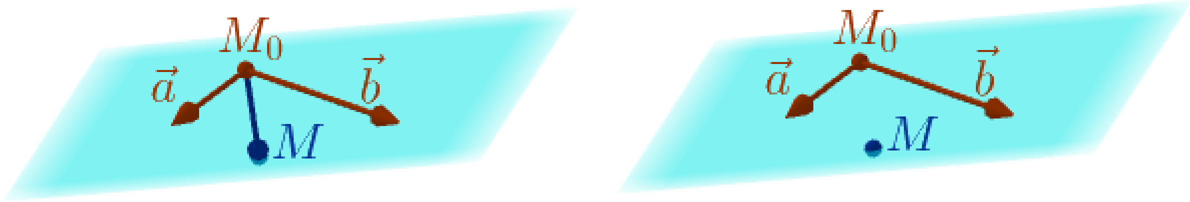

Рис. 4

Значит, вектор $\overrightarrow{M_0M}$ линейно выражается через $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a} + v\vec{b},\ u, v \in \mathbb{R}.$$

Числа u и v – это коэффициенты разложения. Переходя к координатам векторов в левой и правой частях этого равенства, получим:

$$(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) = (ua_1 + vb_1,\ ua_2 + vb_2, ua_3 + vb_3).$$

Уравнивая соответствующие координаты, получаем систему равенств:

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1 \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3 \end{cases}, \text{ где } u, v \in R.$$

При изменении значений параметров u и v значения переменных x, y, z дают всевозможные координаты точек из данной плоскости. Говорят, что плоскость задана системой параметрических уравнений.

С другой стороны, векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ компланарны, в точности тогда, когда определитель, составленный из их координат, равен 0. Получаем уравнение плоскости в канонической форме:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Если расписать определитель любым способом (например, разложив по первой строке), то после приведения подобных членов относительно x, y, z получим общее уравнение прямой.

Теперь рассмотрим случай, когда плоскость задана тремя точками $M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 5).

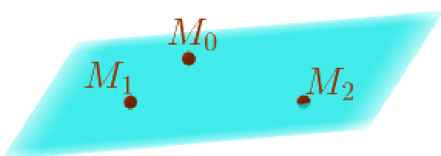

Рис. 5

Чтобы задать плоскость аналитически, можно использовать описанный выше алгоритм, так как три точки этой плоскости, не лежащие на одной прямой, задают два ее направляющих вектора (рис. 6):

$\overrightarrow{M_0M_1}\,(x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0)$ и
$\overrightarrow{M_0M_2}\,(x_2 - x_0,\ y_2 - y_0,\ z_2 - z_0)$.

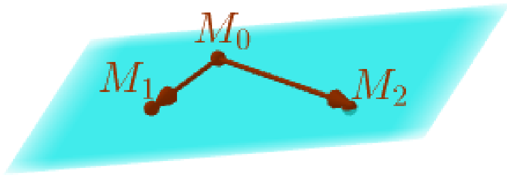

Рис. 6

Поэтому, зная координаты трех точек плоскости, не лежащих на одной прямой, легко получить каноническое уравнение этой плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Теперь рассмотрим третий случай, когда плоскость определена точкой $M_0(x_0,\ y_0, z_0)$ и нормальным вектором $\vec{n}(a, b, c)$ (рис. 7).

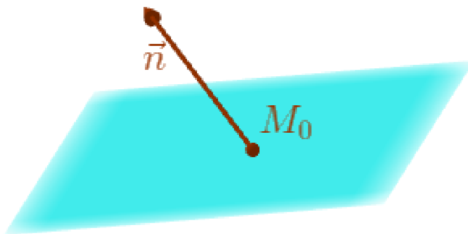

Рис. 7

Точка M с координатами (x, y, z) принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$ ортогонален нормальному вектору $\vec{n}(a, b, c)$, то есть их скалярное произведение равно 0, значит, сумма координат этих векторов равна 0 (рис. 8).

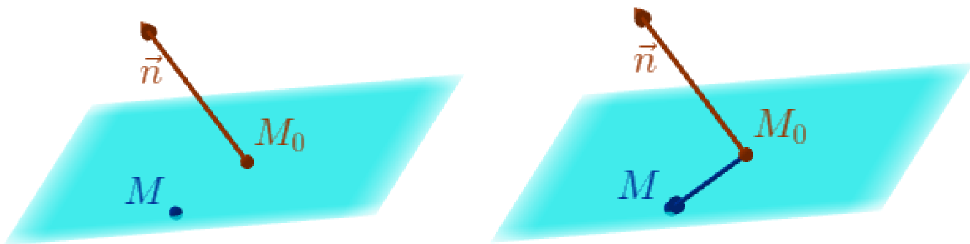

Рис. 8

Получаем, что плоскость может быть задана уравнением следующим образом:

$$M(x, y,\ z) \in \alpha \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a, b,\ c)(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Если раскрыть скобки, то легко получится общее уравнение плоскости, при этом коэффициенты при переменных будут равны координатам нормального вектора.

При этом верно обратное утверждение: если плоскость задана общим уравнением $ax + by + cz + d = 0$, то коэффициент при переменных – это координаты одного их нормальных векторов этой плоскости:

$$\vec{n}(a, b, c) \text{ – нормальный вектор плоскости } ax + by + cz + d = 0.$$

Этот утверждение надо запомнить, оно бывает полезно при решении задач.

Перейдем к вопросу взаимного расположения двух плоскостей.

Пусть в системе координат известны уравнения двух плоскостей α_1 и α_2:

$$\alpha_1 \leftrightarrow a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$\alpha_2 \leftrightarrow a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Нормальные векторы этих плоскостей $\overrightarrow{n_1}(a_1, b_1, c_1)$ и $\overrightarrow{n_2}(a_2, b_2, c_2)$ позволяют судить о взаимном расположении плоскостей (рис. 9).

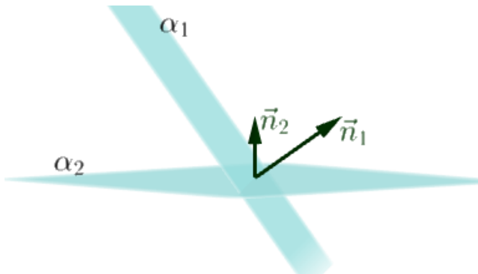

Рис. 9

Возможны следующие случаи:

1. Нахождение *угла между плоскостями* сводится к поиску угла между нормальными векторами. При этом косинус угла между плоскостями равен модулю косинуса угла между нормальными векторами. А косинус угла между векторами, как и раньше, можно вычислить с помощью скалярного произведения:

$$\cos\angle(\alpha_1,\ \alpha_2) = |\cos\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})|,\ \cos\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}.$$

Плоскости перпендикулярны, то есть пересекаются под прямым углом, в точности тогда, когда скалярное произведение нормальных векторов равно 0:

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \iff \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2 = 0.$$

Если нормальные векторы не коллинеарны, то плоскости пересекаются по прямой.

2. Если нормальные векторы коллинеарны, то есть их координаты пропорциональны

$$(a_1, b_1, c_1) = k(a_2, b_2, c_2),$$

то *плоскости параллельны*, либо *совпадают*.

Плоскости будут совпадать тогда и только тогда, когда строки (a_1, b_1, c_1, d_1) и (a_2, b_2, c_2, d_2), составленные из всех коэффициентов уравнений (включая свободный член), будут пропорциональны:

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow (a_1, b_1, c_1, d_1) = k\big(a_2, b_2, c_2, d_2\big).$$

Теперь обсудим варианты взаимного расположения прямой и плоскости в трехмерном пространстве.

Пусть плоскость α определена общим уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Пусть прямая l задана точкой $M_0(x_0,\ y_0, z_0)$ и направляющим вектором $\vec{l}(l_1, l_2, l_3)$. Как известно из предыдущей лекции эти данные определяют каноническое уравнение прямой.

Направляющий вектор $\vec{l}(l_1, l_2, l_3)$ прямой l и нормальный вектор $\vec{n}(a, b, c)$ плоскости α позволяют судить о взаимном расположении l и α (рис. 10).

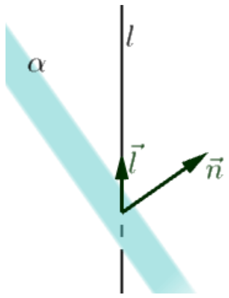

Рис. 10

Известно, что прямая и плоскость могут либо не иметь общих точек (случай параллельности), либо иметь одну общую точку (говорят, что прямая пересекает плоскость), либо все точки прямой лежат в плоскости (говорят, прямая лежит в плоскости).

1. Пусть *прямая пересекает плоскость*. Значит, векторы $\vec{l}$ и $\vec{n}$ не ортогональны, то есть их скалярное произведение не равно 0. Отсюда получаем критерий того, что прямая пересекает плоскость:

$$al_1 + \ bl_2 + cl_3 \neq 0.$$

Если векторы $\vec{l}$ и $\vec{n}$ ортогональны, то прямая либо параллельна плоскости, либо целиком лежит в ней. Если прямая будет лежать в плоскости, то все ее точки, включая *M*, будут удовлетворять уравнению плоскости. Отсюда получаем следующие варианты.

2. *Прямая параллельна плоскости*, то есть не имеет с ней ни одной общей точки, тогда и только тогда, когда

$$al_1 + \ bl_2 + cl_3 = 0, \text{ но } ax_0 \ + \ by_0 \ + \ cz_0 \ + \ d \ \neq \ 0.$$

3. *Прямая лежит в плоскости* тогда и только тогда, когда

$$al_1 + \ bl_2 + cl_3 = 0 \ \text{ и } \ ax_0 \ + \ by_0 \ + \ cz_0 \ + \ d \ = \ 0.$$