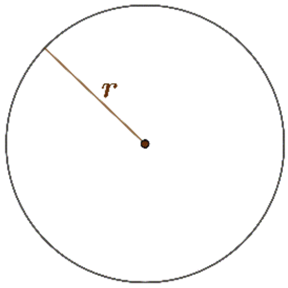
Словарь 14.

Уравнение прямой на плоскости и в пространстве

Фигура на плоскости (или в пространстве) – любое множество точек данной плоскости (или пространства).



Окружность – множество точек плоскости, равноудаленных на постоянное расстояние r (радиус) от фиксированной точки (центра окружности).

Задание фигуры F уравнением – определение ее в системе координат на плоскости (или в пространстве) уравнением вида $f(x,\ y) = 0$ (вида $f(x, y, z) = 0$), которое обозначает, что

$$M(x,\ y) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow f(x,\ y) = 0$$
$$(M(x, y, z) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow f(x, y, z) = 0).$$

Уравнение окружности с центром в заданной точке O с координатами (x_0, y_0) радиуса r:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Параметр – это буква, принимающая произвольное значение из некоторого промежутка.

Параметрическом задании – способ задания фигуры, при котором каждая координата точки, принадлежавшая фигуре, зависит от этого параметра:

$$\begin{cases} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ t \in [a_1,\ a_2] \end{cases}.$$

Можно считать, что параметр обозначает время движения точки, поэтому его часто обозначают буквой t. Если t принадлежит промежутку от a_1 до a_2, то момент времени a_1 – это начало движения точки, a_2 – конец движения. f_1, f_2 – это числовые функции, задающие зависимость координат точки от времени t.

Система параметрических уравнений окружности $\text{Окр}(O(0,\ 0),\ r)$ с центром в начале координат:

$$\begin{cases} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Плоскость

Общее уравнение прямой – уравнение

$$ax + by + c = 0,$$

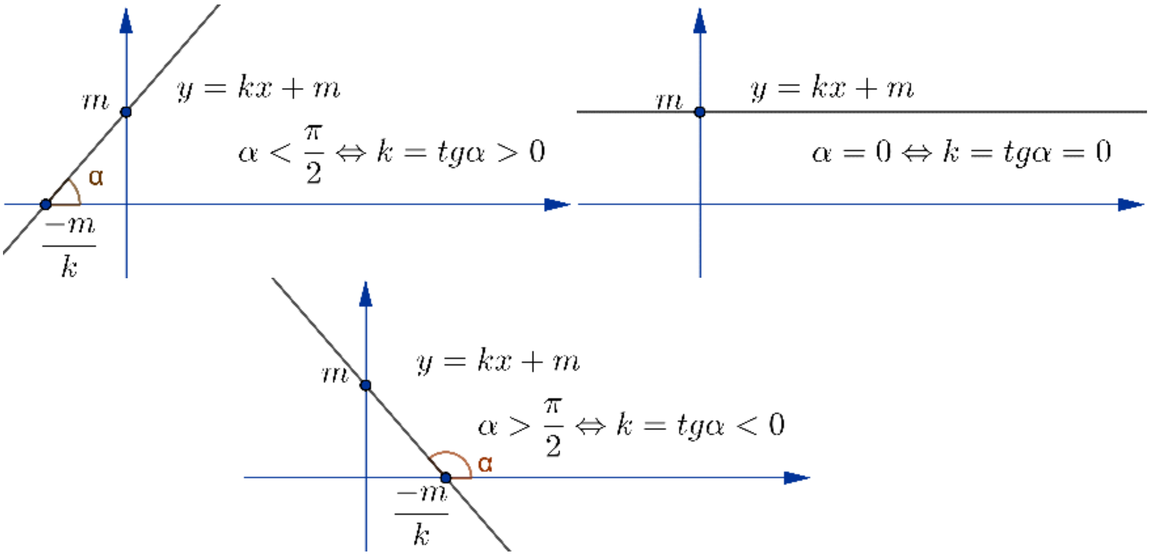
в котором хотя бы один коэффициент a или b не равен 0

(то есть $a^2 + b^2 \neq 0$).

Уравнением прямой с угловым коэффициентом k – уравнение

$$y = kx + m.$$

Угловой коэффициент k равен тангенсу угла между осью абсцисс и прямой: $k = tg(Ox^\wedge l)$.



Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Пусть далее имеются две прямые, заданные общими уравнениями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Общие точки этих прямых являются решениями системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}.$$

Имеют место следующие варианты взаимного расположения прямых:

1. *Прямые пересекаются*, то есть система имеет одно решение или
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$
2. *Прямые совпадают*, то есть система имеет бесконечно много решений или строки коэффициентов (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) пропорциональны.
3. *Прямые параллельны*, то есть не имеют общих точек, равносильно: определитель Δ равен 0, но строки (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) не пропорциональны.

Направляющий вектор прямой – любой ненулевой вектор, параллельный этой прямой.

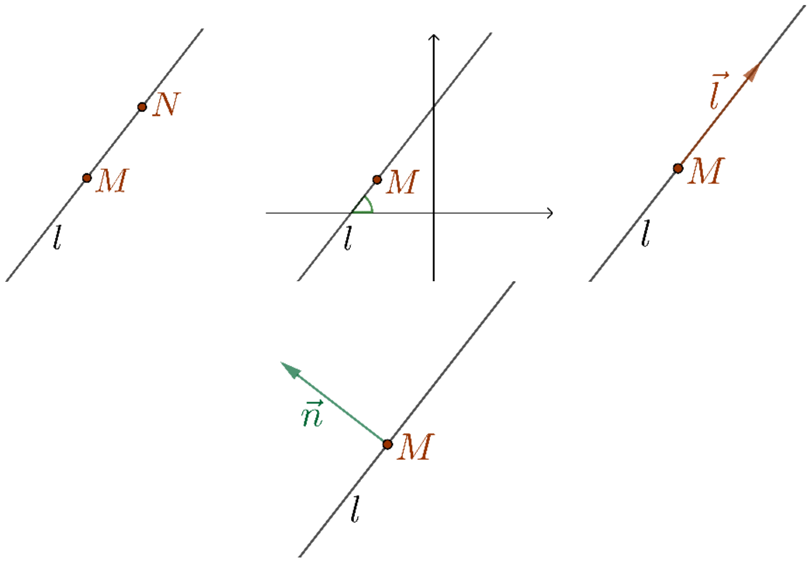
Нормальный вектор прямой – любой ненулевой вектор, перпендикулярный этой прямой.

Для того чтобы однозначно задать прямую, можно

1) указать две различные точки, через которые проходит прямая.
2) задать одной ее точкой и направлением.

Направление прямой l можно определить следующими способами:

– через угловой коэффициент,
– направляющим вектором прямой,
– через нормальный вектором прямой.



Для прямой l_1 обозначим угловой коэффициент k_1, для прямой l_2 угловой коэффициент k_2.

Тогда:

1. $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$.
2. Если прямые пересекаются под непрямым углом, то $\operatorname{tg}\angle(l_1, l_2) = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$.
3. $l_1 \perp l_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 k_2 = -1$.

Для прямой l_1 обозначим направляющий вектор $\overrightarrow{l_1}$, а нормальный вектор $\vec{n}_1$. Аналогично, для прямой l_2: направляющий вектор $\overrightarrow{l_2}$, нормальный вектор $\vec{n}_2$.

1. $l_1 \parallel l_2 \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{l_1} \parallel \overrightarrow{l_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$.
2. $\cos\angle(l_1, l_2) = \left|\cos\angle\left(\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}\right)\right| = \left|\cos\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})\right|$

   $\cos\angle\left(\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}\right) = \frac{\overrightarrow{l_1} \cdot \overrightarrow{l_2}}{|\overrightarrow{l_1}| \cdot |\overrightarrow{l_2}|}$ или $\cos\angle(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$.
3. $l_1 \perp l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{l_1} \cdot \overrightarrow{l_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$.

Система параметрических уравнений прямой l, заданных точкой $M_0(x_0,\ y_0)$ и направляющим вектором $\vec{l}(l_1,\ l_2)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + l_1 t \\ y = y_0 + l_2 t. \\ \quad t \in R \end{cases}$$

Каноническое уравнение прямой l, заданных точкой $M_0(x_0,\ y_0)$ и направляющим вектором $\vec{l}(l_1,\ l_2)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & l_1 \\ y - y_0 & l_2 \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ l_2(x - x_0) = l_1(y - y_0).$$

Если $l_1, l_2 \neq 0$, то каноническое уравнение записывают в виде $\frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{l_2}$.

Уравнение прямой, задана точкой $M_0(x_0,\ y_0)$ и нормальным вектором $\vec{n}(a, b)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

или

$$ax + by - (ax_0 + by_0) = 0.$$

Точнее, если прямая l задана уравнением $ax + by + c = 0$, то $\vec{n}(a, b)$ – нормальный вектор прямой l и $\vec{l}(-b, a)$ – направляющий вектор.

Уравнения прямой, заданной двумя различными точками $M_0(x_0,\ y_0)$ и $M_1(x_1,\ y_1)$:

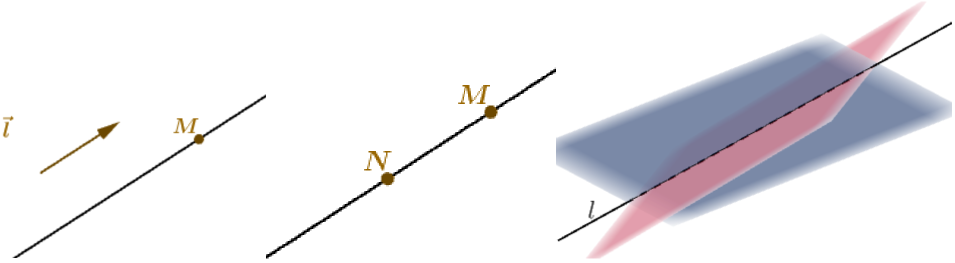
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Если $x_1 \neq x_0$ и $y_1 \neq y_0$, то получаем

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}.$$

Пространство

Прямая в пространстве может быть задана двумя различными точками, точкой и направляющим вектором, а также как линия пересечения двух плоскостей.



Система параметрических уравнений прямой *l*, заданной точкой $M_0(x_0,\ y_0, z_0)$ и направляющим вектором $\vec{l}(l_1,\ l_2,\ l_3)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + l_1 t \\ y = y_0 + l_2 t \\ z = z_0 + l_3 t \\ t \in R \end{cases}$$

Каноническое уравнение прямой, заданной точкой $M_0(x_0,\ y_0, z_0)$ и направляющим вектором $\vec{l}(l_1,\ l_2,\ l_3)$ – уравнение

$$\frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{l_2} = \frac{z-z_0}{l_3}$$

для случая, когда среди координат вектора $\vec{l}$ нет нулевых.

Уравнение прямой, заданной двумя точками $M_0(x_0,\ y_0, z_0)$ и $M_1\left(x_1,\ y_1, z_1\right)$:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$

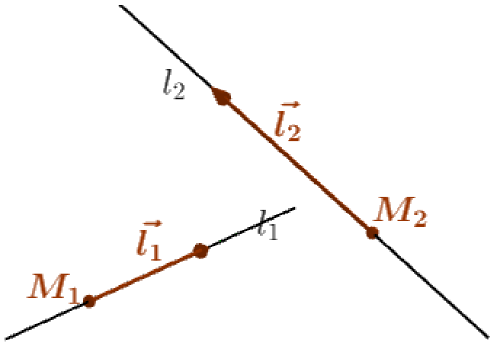
Пусть прямая задана как линия пересечения двух плоскостей, то есть системой уравнений

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}.$$

Тогда направляющий вектор $\vec{l}$ прямой *l* может быть вычислен как

$$\vec{l} = (a_1,\ b_1,\ c_1) \times (a_2,\ b_2, c_2).$$

Пусть теперь в пространстве даны две прямые: прямая l_1, заданная точкой M_1 и направляющим вектором $\overrightarrow{l_1}$, и прямая l_2, заданная точкой M_2 и направляющим вектором $\overrightarrow{l_2}$.



Тогда

1. l_1, l_2 *скрещиваются* $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}, \vec{l_1}$ и $\vec{l_2}$ не компланарны.
2. l_1, l_2 *пересекаются* $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}$, $\vec{l_1}$ и $\vec{l_2}$ компланарны, но направляющие векторы $\vec{l_1}$ и $\vec{l_2}$ прямых не коллинеарны.
3. Разные прямые l_1, l_2 *параллельны* $\Leftrightarrow$ векторы $\vec{l_1}$ и $\vec{l_2}$ коллинеарны, но векторы $\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}$ и $\vec{l_1}$ не коллинеарны.
4. Если же все три вектора $\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}$, $\vec{l_1}$ и $\vec{l_2}$ коллинеарны, то прямые *совпадают*.

Чтобы вычислить угол между прямыми, надо вычислить косинус угла между их направляющими векторами:

$$\cos\angle(\vec{l_1}, \vec{l_2}) = \frac{\vec{l_1}\cdot\vec{l_2}}{|\vec{l_1}|\cdot|\vec{l_2}|}.$$