Уравнение прямой в пространстве

Задача 1. В пространстве даны три точки $A(1; 2; -2)$, $B(2; 3; 4)$, $C(-4; 1; 2)$. Составьте уравнение прямой, которая

а) проходит через точку A параллельно вектору $\overrightarrow{BC}$;

б) проходит через точку A и середину отрезка BC.

Решение. а) Вектор $\overrightarrow{BC}(-6; -2; -2)$ коллинеарен вектору $\vec{l}(3; 1; 1)$. Возьмем его в качестве направляющего вектора нужной прямой. Так как среди координат вектора нет нулевых чисел, то можно составить каноническое уравнение по формуле: $\frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{l_2} = \frac{z-z_0}{l_3}$.

Тогда каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; 2; -2)$ с направлением $\vec{l}(3; 1; 1)$, имеет вид

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}.$$

б) Середина отрезка BC – точка $M(-1; 2; 3)$. Тогда в качестве направляющего вектора прямой можно взять $\overrightarrow{AM}(-2; 0; 5)$. Вторая координата равна 0, поэтому зададим прямую, проходящую через $A(1; 2; -2)$ параллельно $\overrightarrow{AM}(-2; 0; 5)$, с помощью системы параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 0t \\ z = -2 + 5t \end{cases} \text{или} \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = -2 + 5t \end{cases},$$

где параметр t принимает произвольные значения.

Ответ: а) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$; б) $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = -2 + 5t \end{cases}$.

Задача 2. В системе координат $Oxyz$ прямые заданы уравнениями:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z-2}{-8} \text{ и } \frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-k}{4}.$$

Выясните взаимное расположение этих прямых при различных значениях k.

Решение. Направляющие векторы данных прямых: $\vec{a}(2; -6; -8)$, $\vec{b}(-1; 3; 4)$. Так как векторы коллинеарны, то прямые при всех k либо различны и параллельны, либо совпадают.

Первая прямая проходит через точку $M_1(-2; 4; 2)$, вторая прямая – через точку $M_2(1; -5; k)$. Составим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(3; -9; k-2)$. Если этот вектор коллинеарен векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то прямые совпадают. Иначе, прямые не будут иметь общих точек.

Составим условие коллинеарности: $\frac{3}{-1} = \frac{-9}{3} = \frac{k-2}{4}$. Коэффициент пропорциональности (–3), поэтому $\frac{k-2}{4} = -3$, значит, $k = -10$.

Ответ: При $k = -10$ прямые совпадают; при $k \neq -10$ прямые различны и параллельны.

Задача 3. Каково взаимное расположение прямых, заданных уравнениями $x - 2 = y + 1 = z$ и $\begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \\ z = 1 + t \end{cases}$? Вычислите угол между этими прямыми.

Решение. Первая прямая l_1 задана каноническим уравнением, которое можно записать в виде $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$. Поэтому l_1 проходит через точку $M_1(2; -1; 0)$ параллельно вектору $\vec{a}(1; 1; 1)$.

Вторая прямая (l_2) задана системой параметрических уравнений, которую можно записать так: $\begin{cases} x = -3 + 0t \\ y = 5 + 0t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Поэтому l_2 проходит через точку $M_2(-3; 5; 1)$ параллельно вектору $\vec{b}(0; 0; 1)$. Эта прямая параллельна оси Oz.

Выясним, компланарны ли векторы $\vec{a}(1; 1; 1)$, $\vec{b}(0; 0; 1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}(-5; 6; 1)$:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 5II = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ векторы $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{M_1M_2}$ не компланарны.

Значит, прямые скрещиваются.

Вычислим угол между прямыми. Для этого найдем косинус угла φ между направляющими векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Так как $\cos\varphi > 0$, то угол между прямыми – это $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ответ: Прямые скрещиваются. Угол между прямыми равен $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 4. Вычислите расстояние h от точки $M(2; 3; -1)$ до прямой l, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 13 + 4t \end{cases}$.

Решение. Прямая l проходит через точку $K(1; 2; 13)$ параллельно вектору $\vec{a}(1; 1; 4)$. Рассмотрим векторы $\vec{a}(1; 1; 4)$ и $\vec{b} = \overrightarrow{KM}(1; 1 - 14)$. Отложим их от точки K и сделаем рисунок. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ задают параллелограмм, длина высоты которого и равна требуемому расстоянию h от M до прямой l.

Площадь такого параллелограмма равна $S = h \cdot |\vec{a}|$, откуда $h = \frac{S}{|\vec{a}|}$.

Площадь S можно найти либо через скалярное произведение, либо через векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдем $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -14 \end{vmatrix} = -18\vec{\imath} + 18\vec{\jmath} + 0\vec{k} = 18(-\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} + 0\vec{k}).$$

Вычисляем:

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 18 \cdot \sqrt{1+1} = 18\sqrt{2},\ |\vec{a}| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Тогда $h = \frac{18\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 6$.

Ответ: 6.