Лекция.

Уравнение прямой на плоскости и в пространстве

На лекции рассмотрим основные способы составления уравнения прямой на плоскости и в трехмерном пространстве, и варианты взаимного расположения прямых.

Вначале определим, что понимается под уравнением фигуры.

Фигурой на плоскости (или в пространстве) называется любое множество точек данной плоскости (или пространства).

Известный пример фигуры – окружность, которая представляет собой множество точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки, называемой центром окружности. Постоянное расстояние r, на которое удалены все точки окружности от центра, называется радиусом окружности (рис. 1)

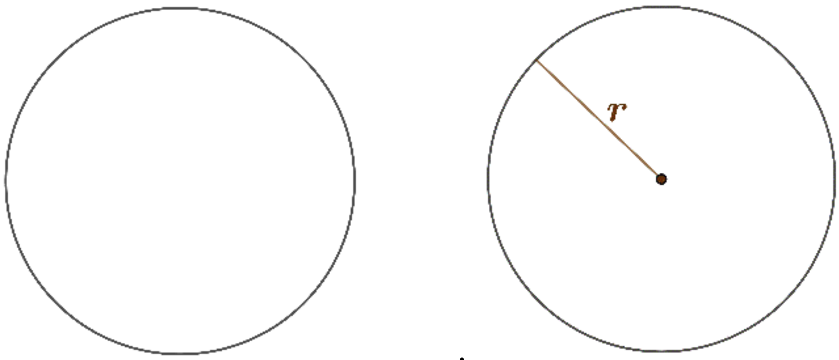

Рис. 1

В системе координат на плоскости фигура F задается уравнением с двумя переменными вида $f(x,\ y) = 0$, если

$$M(x,\ y) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow f(x,\ y) = 0.$$

Смысл уравнения фигуры в следующем: точка M с координатами (x, y) принадлежит фигуре F тогда и только тогда, когда координаты точки M удовлетворяют этому уравнению.

Аналогично определяется задание фигуры уравнением в пространстве.

Составим уравнение окружности с центром в заданной точке O с координатами (x_0, y_0) радиуса r (рис. 2).

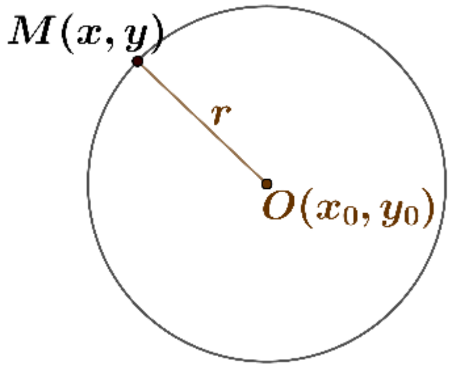

Рис. 2

По определению

$$M(x, y) \in \text{Окр} \quad \Leftrightarrow \quad r = OM \; = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Возводим обе части полученного равенства в квадрат:

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

Имеем уравнение с двумя переменными x, y :

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ – уравнение окружности с центром $O(x_0, y_0)$ радиуса r. Такую окружность кратко обозначают $\text{Окр}(O(x_0, y_0),\ r)$.

Фигуру часто задают системой параметрических уравнений. Параметр – это буква, принимающая произвольное значение из некоторого промежутка. При параметрическом задании каждая координата точки, принадлежавшая фигуре, зависит от этого параметра:

$$\begin{cases} x \;=\; f_1(t) \\ y \;= f_2(t) \\ t \in [a_1,\ a_2] \end{cases}.$$

Можно считать, что параметр обозначает время движения точки, поэтому его часто обозначают буквой t. Если t принадлежит промежутку от a_1 до a_2, то момент времени a_1 – это начало движения точки, a_2 – конец движения. f_1, f_2 – это числовые функции, задающие зависимость координат точки от времени t.

Для примера зададим окружность $\text{Окр}(O(0,\ 0),\ r)$ с центром в начале координат системой параметрических уравнений (рис. 3)

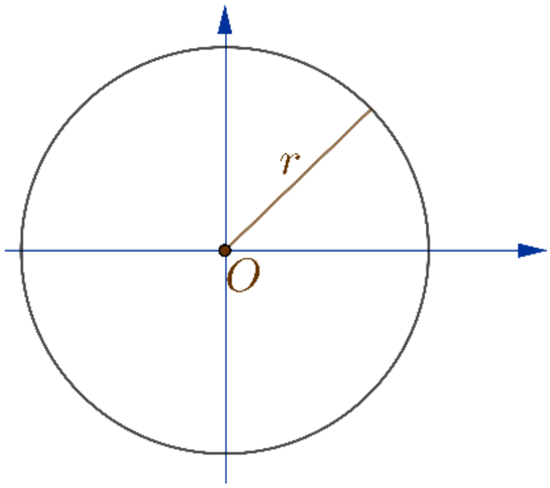

Рис. 3

Возьмем произвольную точку $M(x, y) \in \text{Окр}$ (рис. 4).

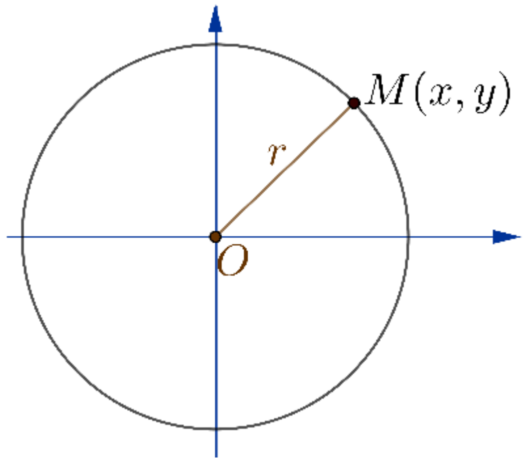

Рис. 4

Обозначим через t угол между ее радиус-вектором и положительным направлением оси Ox для того, чтобы выразить координаты точки M через параметр t (рис. 5).

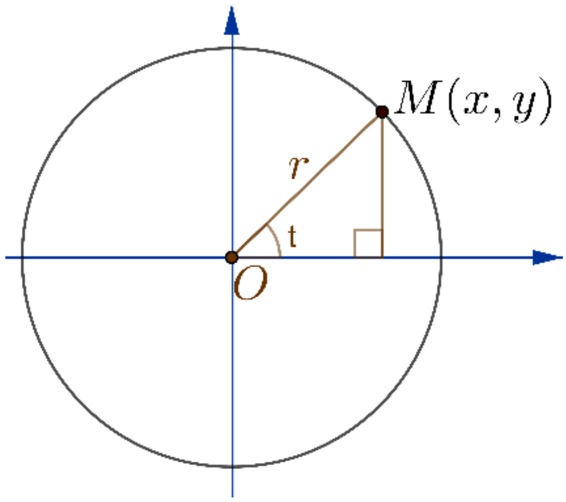

Рис. 5

Получаем параметрическое уравнение Окр$(O(0,\ 0),\ r)$:

$$\begin{cases} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \\ t \in [0,2\pi] \end{cases}$$

Рассмотрим вопрос задания прямой на плоскости.

Нам уже известно, что прямая на плоскости задается линейным уравнением с двумя переменными

$$ax + by + c = 0,$$

в котором хотя бы один коэффициент a или b не равен 0 (то есть $a^2 + b^2 \neq 0$). Такое уравнение называют общим уравнением прямой.

Если одновременно $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то прямая не параллельная координатным осям (например, рис. 6).

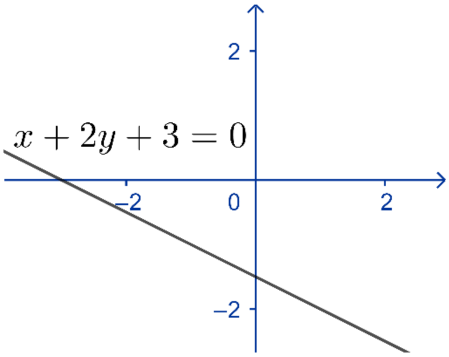

Рис. 6

Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то прямая параллельна оси абсцисс (например, рис. 7).

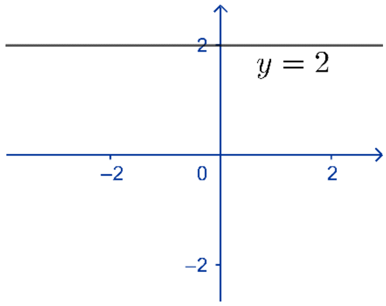

Рис. 7

Если $b = 0$ и $a \neq 0$, то прямая параллельная оси ординат (например, рис. 8).

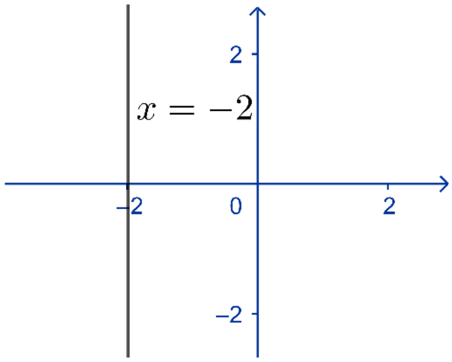

Рис. 8

Если в общем уравнении прямой коэффициент b не равен 0, то уравнение легко преобразовать к следующему виду (поделим обе части равенства на b):

$$y = \frac{-a}{b}x + \frac{-c}{b}.$$

Полученное уравнение прямой

$$y = kx + m$$

$$(k = \frac{-a}{b}, m = \frac{-c}{b})$$

называется уравнением с угловым коэффициентом k. Такое уравнение задает линейную функцию (рис 9).

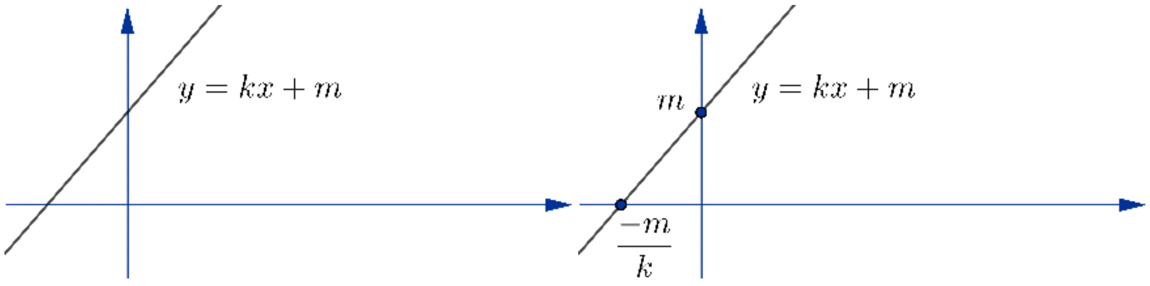

Рис. 9

Рассмотрим ориентированный угол между осью абсцисс и прямой (рис. 10). Если прямая параллельна оси абсцисс, будем считать его равным 0.

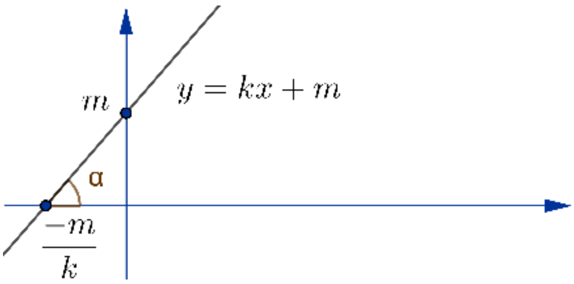

Рис. 10

Угловой коэффициент k равен тангенсу угла между осью абсцисс и прямой:

$$k = tg(Ox^\wedge l).$$

Если указанный угол острый, то $k > 0$, если тупой, то $k < 0$, если прямая параллельна оси, то $k = 0$ (рис. 11).

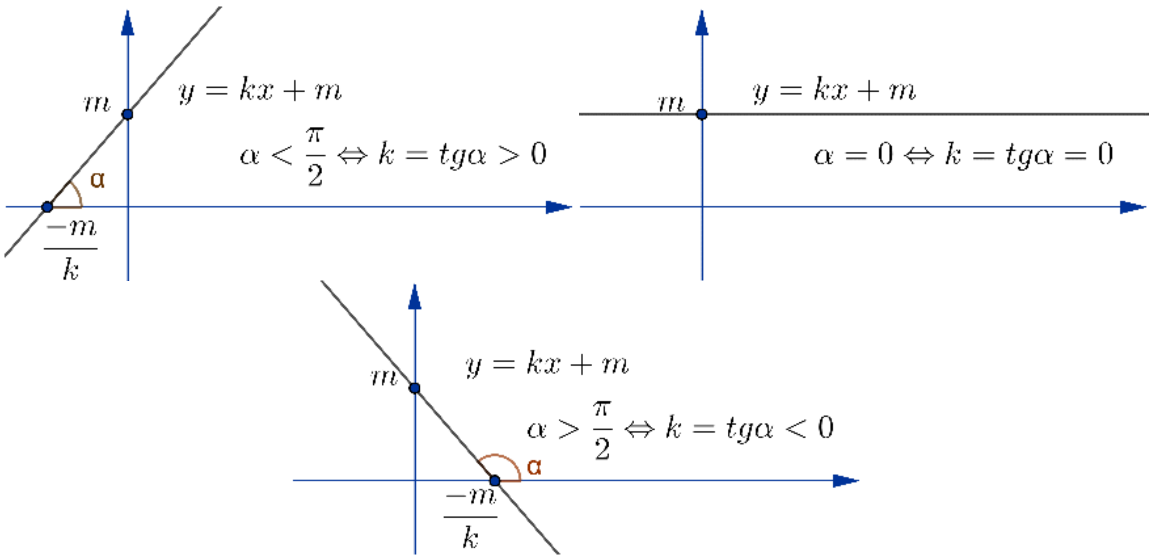

Рис. 11

Если известно, что прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеет угловой коэффициент k, то она может быть задана уравнением вида

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Пусть далее имеются две прямые, заданные общими уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ и } a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Общие точки этих прямых являются решениями системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}.$$

Имеют место следующие варианты взаимного расположения прямых:

1. *Прямые пересекаются*. Это означает, что система имеет одно решение, что возможно тогда и только тогда, когда определитель Δ, составленный из коэффициентов при переменных не равен 0, то есть эти коэффициенты не пропорциональны:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

2. *Прямые совпадают*. Значит, система имеет бесконечно много решений, то есть строки коэффициентов (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) пропорциональны. Например, $2x - y + 3 = 0$ и $4x - 2y + 6 = 0$ – уравнения совпадающих прямых.

3. *Прямые параллельны*, то есть не имеют общих точек. Значит, определитель Δ равен 0, но строки (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) не пропорциональны. Например, прямые $2x - y + 3 = 0$ и $4x - 2y + 5 = 0$ параллельны, так как $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$, то есть строки основной матрицы (2; –1) и (4; –2) пропорциональны, но строки расширенной матрицы (2; –1; 3) и (4; –2; 5) не пропорциональны.

Приведем другие способы задания прямой.

Для того чтобы однозначно задать прямую, можно указать две различные точки, через которые проходит прямая (рис. 12).

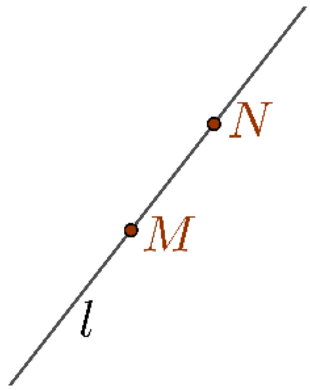

Рис. 12

Также прямую можно однозначно задать одной ее точкой и направлением.

Направление прямой l можно определить следующими способами:

– через угловой коэффициент (рис. 13),

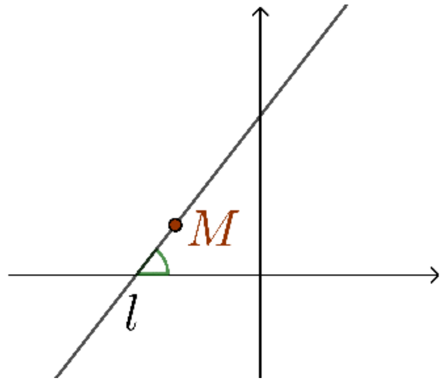

Рис. 13

– через ненулевой вектор, параллельный прямой l (рис. 14, любой такой вектор называется направляющим вектором прямой, обозначим его $\vec{l}$),

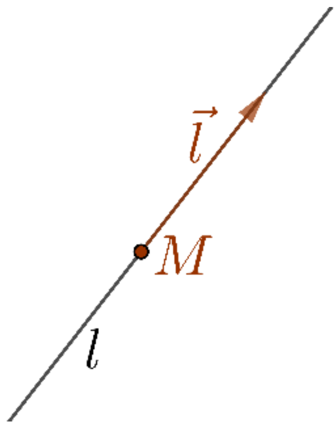

Рис. 14

–через ненулевой вектор, перпендикулярный прямой l (рис. 15, любой такой вектор называется нормальный вектором прямой, обозначим его $\vec{n}$).

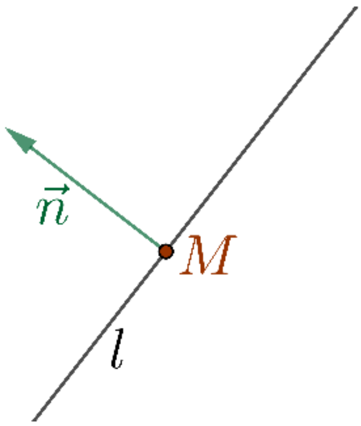

Рис. 15

Рассмотрим подробно случай, когда прямая задается точкой и направлением. Известное направление прямых позволяет, в частности, легко вычислять углы между прямыми.

Пусть направления прямых заданы их угловыми коэффициентами. Для прямой l_1 обозначим угловой коэффициент k_1, для прямой l_2 угловой коэффициент k_2.

Итак:

$$k_1 = tg\,\alpha_1,$$
$$k_2 = tg\,\alpha_2.$$

Эти прямые параллельны в точности тогда, когда равны их угловые коэффициенты (рис. 16):

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2.$$

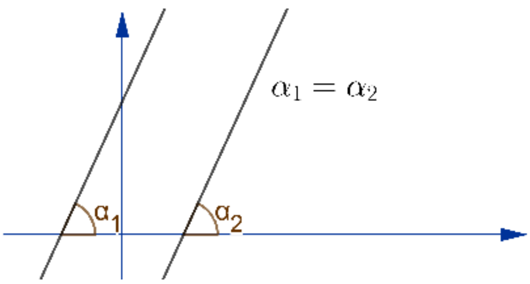

Рис. 16

Пусть прямые пересекаются под углом, меньшим прямого (рис. 17, $l_1^\wedge l_2 = \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$).

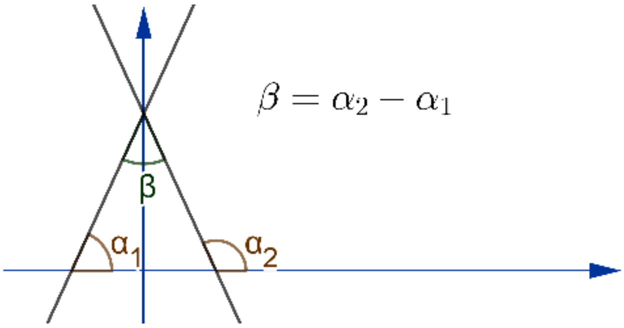

Рис.17

В общем случае получаем:

$$tg\,\beta = |tg(\alpha_2 - \alpha_1)| = \left|\frac{tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1}{1 + tg\,\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}\right| = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Значит,

$$\operatorname{tg} \angle(l_1, l_2) = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

знаменатель дроби $1 + k_1 k_2$ равен 0 тогда и только тогда, когда, когда прямые l_1 и l_2 перпендикулярны, то есть угол между ними 90°, а его тангенс не определен (рис. 18).

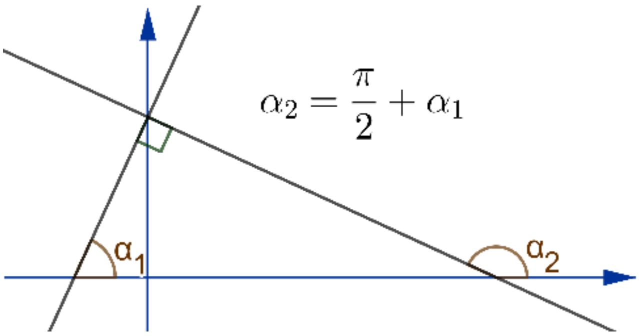

Рис. 18

Действительно,

$\beta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1$ и $tg\,\alpha_1\, tg(\alpha_2) = tg\,\alpha_1\, tg(\frac{\pi}{2} + \alpha_1) = -1 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$

Значит,

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.$$

Рассмотрим случай, когда направления прямых заданы векторами. Для прямой l_1 обозначим направляющий вектор $\vec{l_1}$, а нормальный вектор $\vec{n}_1$. Аналогично, для прямой l_2: направляющий вектор $\vec{l_2}$, нормальный вектор $\vec{n}_2$.

Пусть прямые параллельны (рис. 19).

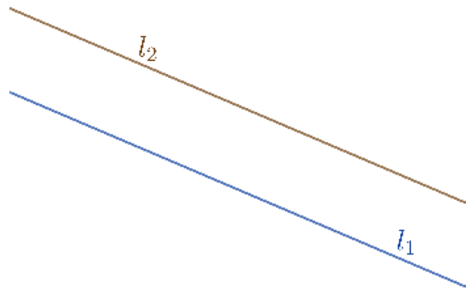

Рис. 19

Легко видеть, что параллельность прямых равнозначна коллинеарности их направляющих векторов (рис. 20):

$$l_1 \parallel l_2 \;\Leftrightarrow \overrightarrow{l_1} \parallel \overrightarrow{l_2}.$$

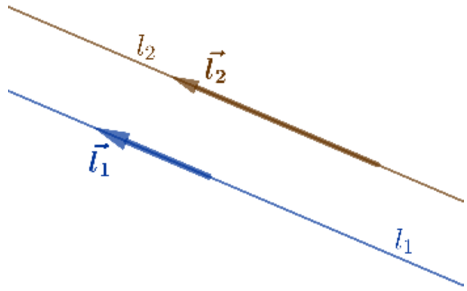

Рис. 20

Также параллельность прямых равносильна коллинеарности их нормальных векторов (рис. 21):

$$l_1 \parallel l_2 \;\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}.$$

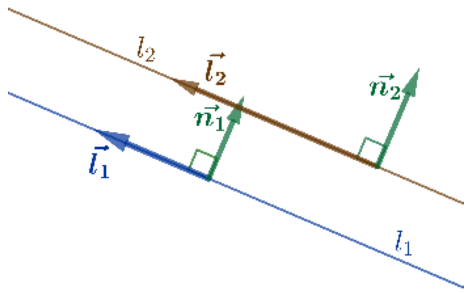

Рис. 21

Пусть теперь прямые l_1, l_2 пересекаются (рис. 22).

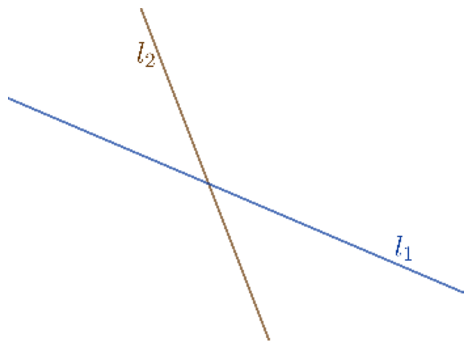

Рис. 22

Найдем угол между прямыми (рис. 23).

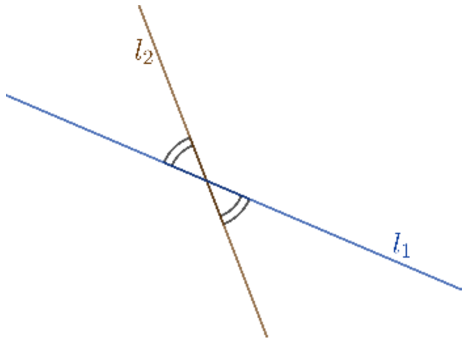

Рис. 23

Угол между прямыми легко находится по углу между направляющими векторами прямых либо по углу между их нормалями (рис. 24).

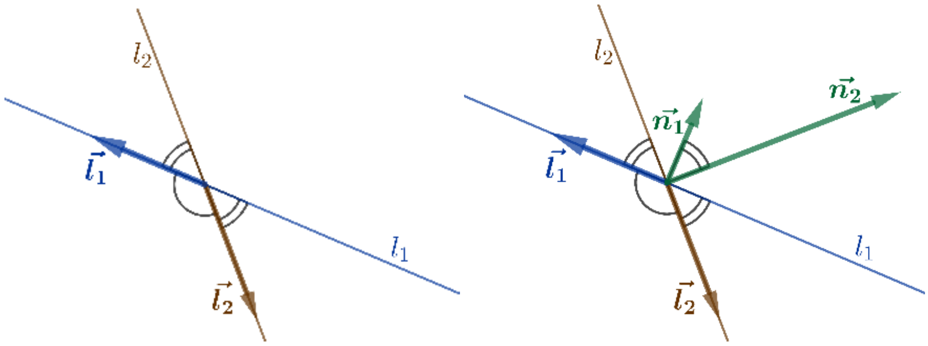

Рис. 24

Вначале найдем косинус угла между направляющими или нормальными векторами:

$$\cos\angle(\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2})=\frac{\overrightarrow{l_1}\cdot\overrightarrow{l_2}}{|\overrightarrow{l_1}|\cdot|\overrightarrow{l_2}|}\text{ или }\cos\angle(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}.$$

Косинус угла между прямыми равен модулю косинуса угла между направляющими векторами (или нормальными векторами). Модуль берется потому, что угол α между векторами может получиться тупым, тогда угол между прямыми будет равен $180^\circ-\alpha$, а косинус острого угла должен быть больше 0. Напомним, что углом между пересекающимися прямыми называется наименьший из углов, образованных этими прямыми. Поэтому угол между прямыми не превосходит 90°. Итак,

$$\cos\angle(l_1,l_2)=\left|\cos\angle(\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2})\right|=|\cos\angle(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})|.$$

Для случая, когда прямые перпендикулярны получаем критерий перпендикулярных прямых:

$$l_1\perp l_2\iff\overrightarrow{l_1}\cdot\overrightarrow{l_2}=0\iff\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0.$$

Покажем далее, как записать уравнение прямой, заданной точкой $M_0(x_0,\ y_0)$ и направляющим вектором $\vec{l}(l_1,\ l_2)$ (рис. 25).

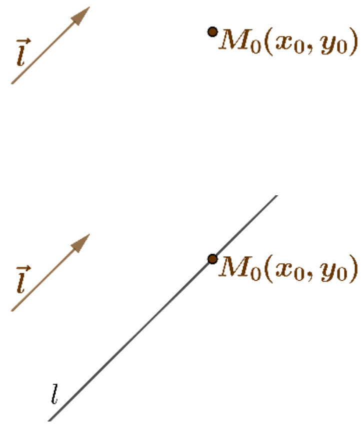

Рис. 25

Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ на прямой l (рис. 26).

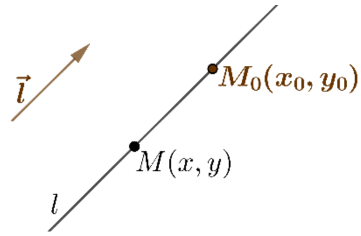

Рис. 26

Принадлежность точки $M(x, y)$ прямой l определяет вектор $\overrightarrow{M_0M}$ (рис. 27):

$$M(x, y) \in l \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{l}.$$

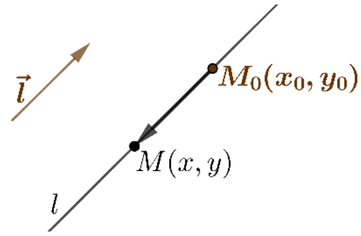

Рис. 27

Получаем:

$$M(x, y) \in l \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{l} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t\vec{l},\ t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - x_0,\ y - y_0) = (l_1 t,\ l_2 t).$$

Полученное векторное равенство равносильно системе параметрических уравнений прямой l:

$$\begin{cases} x = x_0 + l_1 t \\ y = y_0 + l_2 t. \\ \quad t \in R \end{cases}$$

С другой стороны, коллинеарность векторов $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{l}$ дает каноническое уравнение прямой:

$$M(x, y) \in l \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{l} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & l_1 \\ y - y_0 & l_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow l_2(x - x_0) = l_1(y - y_0).$$

Если $l_1, l_2 \neq 0$, то каноническое уравнение записывают в виде

$$\frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{l_2}.$$

Пусть теперь прямая задана точкой $M_0(x_0,\, y_0)$ и нормальным вектором $\vec{n}(a, b)$ (рис. 28).

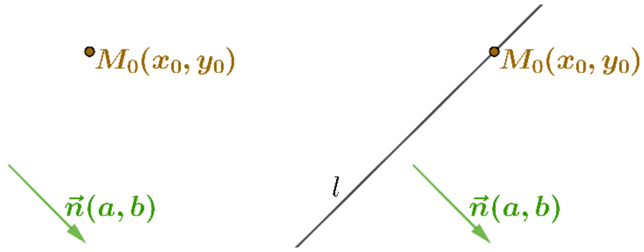

Рис. 28

В этом случае направляющий вектор имеет координаты $\vec{l}(-b, a)$ (рис. 29).

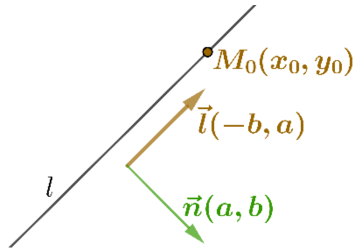

Рис. 29

Действительно,

$$\vec{n}\vec{l} = 0 \;\Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{l} \;\Leftrightarrow \vec{l} \parallel l \Rightarrow \vec{l}(-b, a) - \text{направляющий.}$$

Каноническое уравнение прямой приобретает следующий вид:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

а общее уравнение такой:

$$ax + by - (ax_0 + by_0) = 0.$$

Заметим, что в полученном уравнении коэффициенты при переменных совпадают с координатами нормального уравнения. Верно и обратное: зная общее уравнение, легко определить координаты нормального и направляющего векторов. Точнее, если прямая l задана уравнением

$$ax + by + c = 0,$$

то

$\vec{n}(a, b)$ – нормальный вектор прямой l

(соответственно $\vec{l}(-b, a)$ – направляющий вектор).

Пусть сейчас прямая задана двумя различными точками $M_0(x_0,\, y_0)$ и $M_1(x_1,\, y_1)$ (рис. 30).

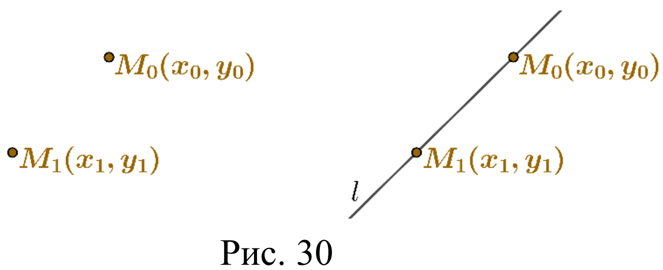

Рис. 30

Данные точки определяют направляющий вектор данной прямой $\overrightarrow{M_0M_1}\,(x_1 - x_0,\ y_1 - y_0)$ (рис. 31).

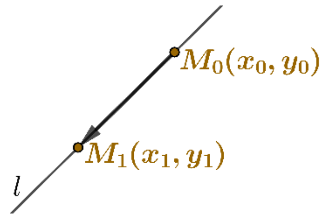

Рис. 31

Значит, канонические уравнения прямой примет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Если $x_1 \neq x_0$ и $y_1 \neq y_0$, то полученное равенство можно записать в виде

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Перейдем к случаю прямой в пространстве.

Прямая в пространстве может быть задана двумя различными точками, точкой и направляющим вектором, а также как линия пересечения двух плоскостей (рис. 32).

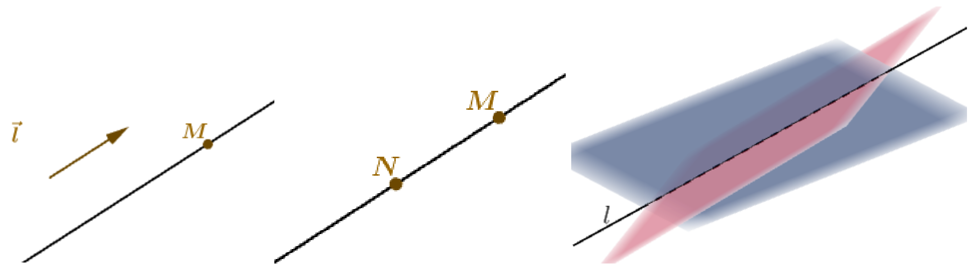

Рис. 32

Пусть прямая l задана точкой $M_0(x_0,\ y_0, z_0)$ и направляющим вектором $\vec{l}(l_1,\ l_2,\ l_3)$. Тогда по аналогии с плоскостью можно составить систему параметрических уравнений прямой l:

$$\begin{cases} x = x_0 + l_1 t \\ y = y_0 + l_2 t \\ z = z_0 + l_3 t \\ t \in R \end{cases}.$$

Если среди координат вектора $\vec{l}$ нет нулевых, то приведенную выше систему можно записать в виде двойного равенства:

$$\frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{l_2} = \frac{z - z_0}{l_3},$$

которое называется каноническим уравнением прямой.

Пусть прямая l задана двумя точками $M_0(x_0,\ y_0, z_0)$ и $M_1(x_1,\ y_1, z_1)$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M_1}\ (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0)$ является направляющим вектором данной прямой. Поэтому каноническое уравнение прямой, заданной двумя точками, примет вид:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$

Наконец, пусть прямая задана как линия пересечения двух плоскостей. Об уравнении плоскости подробно будет говориться на следующей лекции. Но мы уже знаем, что уравнение плоскости – это линейное уравнение с тремя переменными. Итак, допустим, что прямая l задана двумя пересекающимися плоскостями, то есть системой уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}.$$

Тогда направляющий вектор прямой l может быть вычислен как векторное произведение векторов с координатами $(a_1,\ b_1,\ c_1)$ и $(a_2,\ b_2, c_2)$:

$$\vec{l} = (a_1,\ b_1,\ c_1) \times (a_2,\ b_2, c_2).$$

Также можно решить систему уравнений и найти любые два ее решения, тем самым определив две точки, принадлежащие прямой. Это даст возможность записать каноническое уравнение прямой.

Пусть теперь в пространстве даны две прямые: прямая l_1, заданная точкой M_1 и направляющим вектором $\overrightarrow{l_1}$, и прямая l_2, заданная точкой M_2 и направляющим вектором $\overrightarrow{l_2}$ (рис. 33).

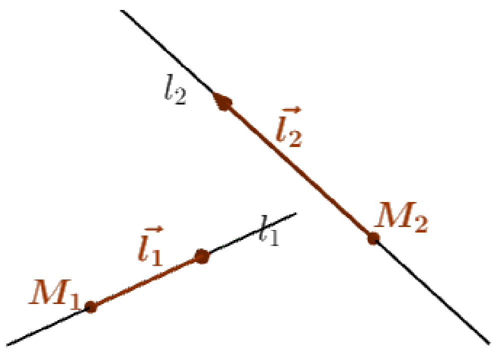

Рис. 33

Взаимное расположение может быть определено по трем векторам: $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{l_1}$ и $\overrightarrow{l_2}$ (рис. 34).

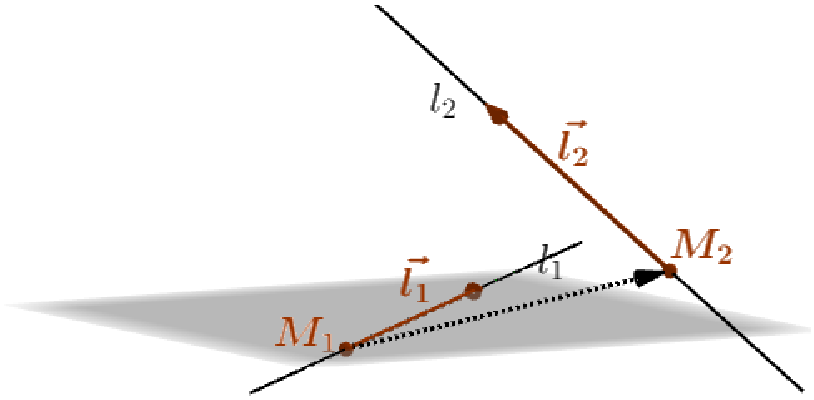

Рис. 34

1. l_1, l_2 *скрещиваются* $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}, \vec{l_1}$ и $\vec{l_2}$ не компланарны.

2. $l_1,\ l_2$ *пересекаются* $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2},\ \vec{l_1}$ и $\vec{l_2}$ компланарны, но направляющие векторы $\vec{l_1}$ и $\vec{l_2}$ прямых не коллинеарны.

3. Разные прямые $l_1,\ l_2$ *параллельны* $\Leftrightarrow$ векторы $\vec{l_1}$ и $\vec{l_2}$ коллинеарны, но векторы $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}$ и $\vec{l_1}$ не коллинеарны.

4. Если же все три вектора $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}, \vec{l_1}$ и $\vec{l_2}$ коллинеарны, то прямые *совпадают*.

Рисунки сделайте самостоятельно.

Чтобы вычислить угол между прямыми, надо вычислить косинус угла между их направляющими векторами:

$$\cos\angle\left(\vec{l_1}, \vec{l_2}\right) = \frac{\vec{l_1}\cdot\vec{l_2}}{|\vec{l_1}|\cdot|\vec{l_2}|}.$$

Косинус угла между прямыми будет равен модулю косинуса угла между их направляющими векторами.