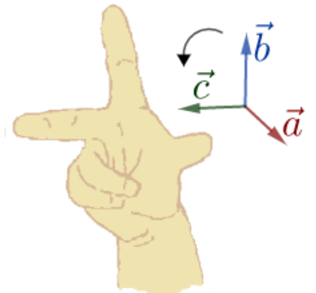
Словарь 13.

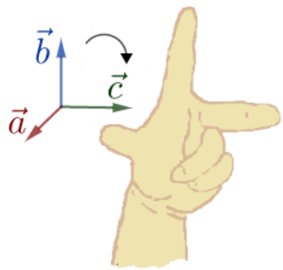
Векторное произведение векторов

Правый базис $(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c})$ трехмерного пространства – базис, для которого три пальца правой руки (большой, указательный, средний) можно расположить по направлению этих векторов. Более четко это можно охарактеризовать таким свойством: если смотреть с конца первого вектора, то переход от второго к третьему вектору будет осуществляться против часовой стрелки.



правый базис

Левым базис $(\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c})$ трехмерного пространства – базис, тройка векторов которого соответствует трем пальцам левой руки, то. В этом случае переход от второго вектора к третьему осуществляется по часовой стрелке.



левый базис

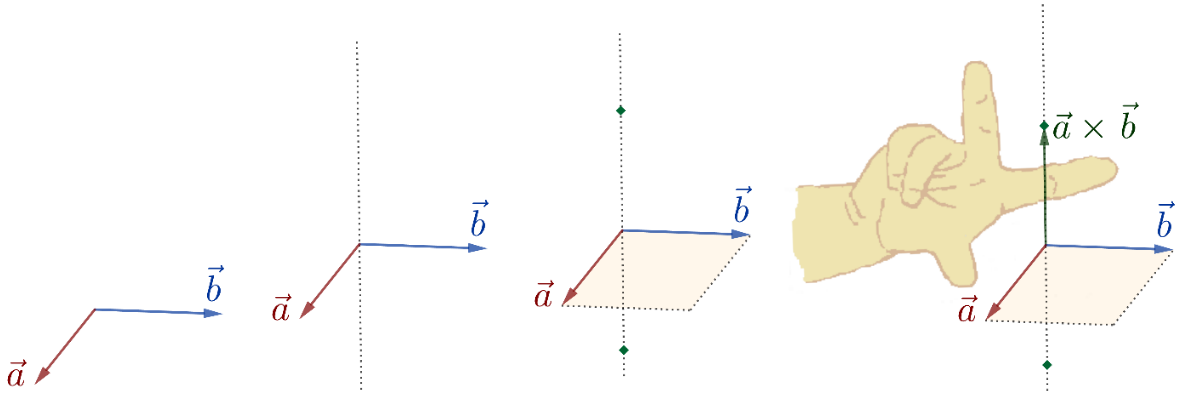
Положительная ориентация трехмерного пространства – одна из двух ориентаций (левая или правая), которую мы выбираем за основную. Обычно такой ориентацией называют ориентацию правого базиса. Мы в дальнейшем при рассмотрении примеров положительно ориентированным будем называть именно правый базис.

Векторное произведение неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – вектор, который удовлетворяет следующим условиям:

1) он ортогонален каждому из данных векторов;

2) его длина равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) ориентация векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и их векторного произведения положительна.



Векторное произведение коллинеарных векторов равно 0.

Свойства векторного умножения.

1. Расписав площадь параллелограмма через длины сторон и угол между ними, из второго пункта определения можно получить равенство:
$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \left|\sin\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\right|.$
2. Площадь треугольника, построенного на векторах ***a*** и ***b***, равна половине площади соответствующего параллелограмма, то есть одной второй модуля векторного произведения:
$S_{\text{тр}-\text{а} \leftrightsquigarrow \vec{a} \text{ и } \vec{b}} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|.$
3. Векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда угол между ними равен 0 или π, то есть когда их векторное произведение равно нулевому вектору:
$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$
4. При смене порядка записи векторов их произведение изменяет знак на противоположный:
$-(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \times \vec{a}.$
5. Скаляр можно вынести за скобки векторного произведения:
$(r\vec{a}) \times \vec{b} = r\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{a} \times \left(r\vec{b}\right).$
6. Также это произведение дистрибутивно относительно операции сложения, что дает возможность раскрывать скобки обычным образом:
$(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) \times \vec{b} = \overrightarrow{a_1} \times \vec{b} + \overrightarrow{a_2} \times \vec{b}$ и
$\vec{b} \times (\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) = \vec{b} \times \overrightarrow{a_2} + \vec{b} \times \overrightarrow{a_2}.$

Теорема. *Если в положительно ориентированной ПДСК заданы координаты векторов* $\vec{a}\left(a_1,\ a_2,\ a_3\right), \vec{b}\left(b_1,\ b_2,\ b_3\right)$*, то их векторное произведение вычисляется по формуле*:

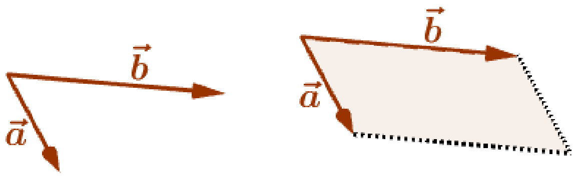
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k},$$

или $\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$,

или $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

Теорема. *Площадь* параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(a_1,\ a_2)$ и $\vec{b}\ (b_1,\ b_2)$ (координаты в ПДСК) *равна модулю определителя, составленного из координат этих векторов*:

$$S_{\text{пар}-\text{ма} \leftrightsquigarrow \vec{a} \text{ и } \vec{b}} = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right|.$$



Нормальный вектор к плоскости – любой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный данной плоскости.

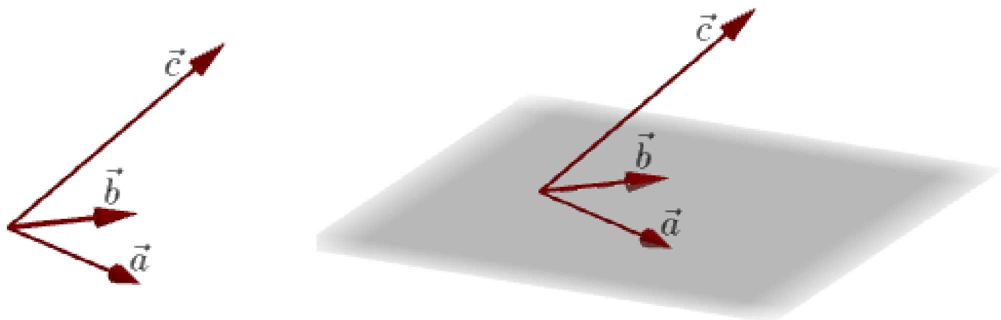
Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – результат последовательного выполнения двух умножений

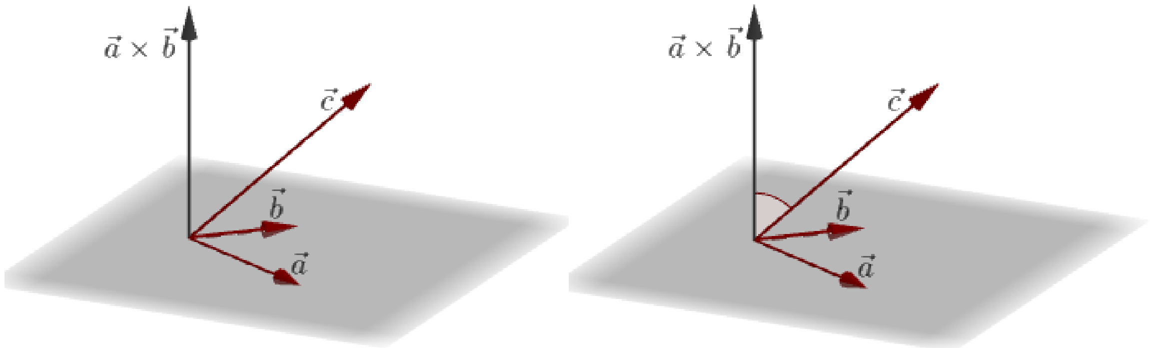
$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c},$$

сначала векторного, а затем скалярного. Записывают: $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Операция смешанного произведения сопоставляет трем векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ число $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

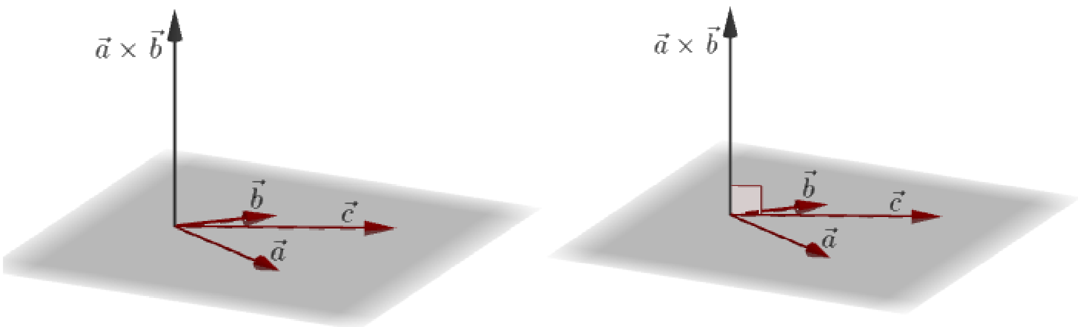
Свойства смешанного произведения:

1. Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, образующих положительно ориентированный базис больше 0 (угол, нужный при вычислении скалярного произведения острый).





2. Смешанное произведение компланарных векторов равно 0 (угол будет прямым).



3. Смешанное произведение для отрицательно ориентированного базиса отрицательно (получим тупой угол).

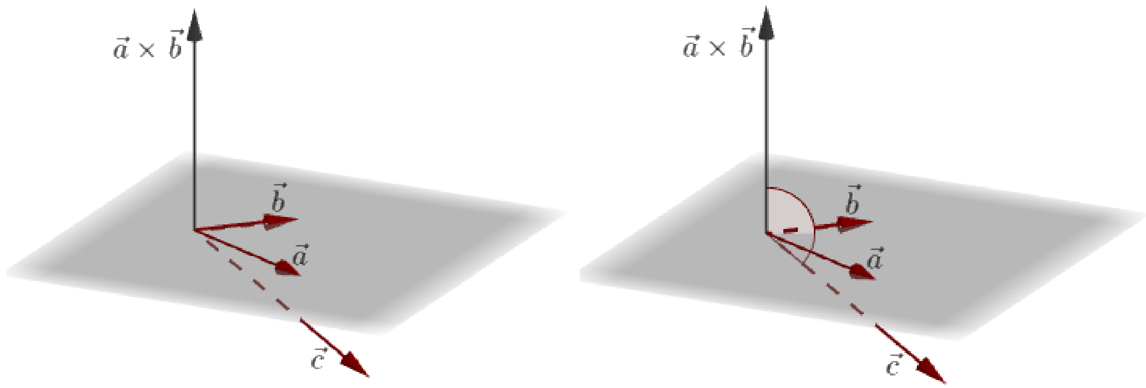
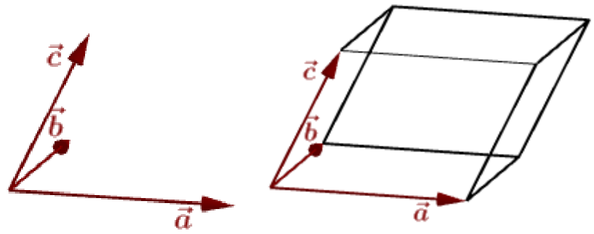


Рис. 20

Теорема. *Если три вектора* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *не компланарны, то модуль их смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах*:

$$V_{\text{пар−да} \leftrightsquigarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$



Следствие. *Для некомпланарных векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}, \vec{c}$

$$V_{\text{тет}-\text{да} \leftrightsquigarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}} = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

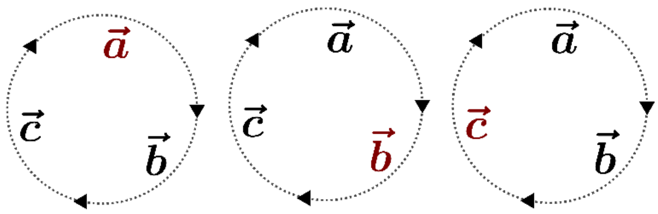
Теорема. *Для положительно ориентированной ПДСК смешанное произведение векторов* $\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3), \vec{c}(c_1, c_2, c)$ *равно определителю, составленному из их координат:*

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема. Верны следующие свойства:

1. *При циклической перестановке множителей смешанное произведение не изменится*:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$



2. Если поменять местами только два множителя, смешанное произведение меняет знак:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}.$$

3. *Числовой коэффициент можно вынести из любого множителя смешанного произведения*:

$$(r\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(r\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(r\vec{c}) = r(\vec{a}\vec{b}\vec{c}).$$

4. *Для смешанного произведения справедлив аналог дистрибутивного закона, то есть справедливы равенства, позволяющие раскрывать скобки, при этом суммой может являться любой множитель*:

$$(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2})\vec{b}\vec{c} = \overrightarrow{a_1}\vec{b}\vec{c} + \overrightarrow{a_2}\vec{b}\vec{c},$$
$$\vec{b}(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2})\vec{c} = \vec{b}\overrightarrow{a_1}\vec{c} + \vec{b}\overrightarrow{a_2}\vec{c}$$
$$\vec{b}\vec{c}(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) = \vec{b}\vec{c}\overrightarrow{a_1} + \vec{b}\vec{c}\overrightarrow{a_2}.$$